ÜBER KONZENTRISCHE FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

PREISGEKRÖNTE LÖSUNG

DER

VON DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

LANDESUNIVERSITÄT ROSTOCK

GESTELLTEN PREISAUFGABE

VORGELEGT

VON

KARL BOLLERT

AUS ROSTOCK

ACAD. LAND BAT BIBL

BERLIN

DRUCK VON G. BERNSTEIN

Referent: Herr Prof. Dr. **Staude.**

Frau Lydia Alafousoff

in dankbarer Verehrung

der Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552723_0098

Einleitung.

Die Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte im allgemeinen, sowie die zweier Oberflächen zweiter Ordnung sind bekanntlich sehr genau und systematisch untersucht. Aus diesen Lagebeziehungen lassen sich diejenigen von zwei konzentrischen Kegelschnitten resp. von zwei konzentrischen Oberflächen zweiter Ordnung ableiten. Für zwei konzentrische Kegelschnitte befindet sich eine solche Ableitung in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann I, Seite 141. Doch ist diese, wie Herr Professor Staude bemerkt hat, nicht ganz erschöpfend. Von den Lagebeziehungen zweier konzentrischer Oberflächen zweiter Ordnung sind aber nur einige interessante Spezialfälle bekannt. Es ist jetzt unsere Aufgabe, die Untersuchungen über zwei konzentrische Kegelschnitte zu vervollständigen und auf zwei konzentrische Oberflächen auszudehnen.

§ 1.

Voraussetzungen aus der Theorie der Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte.

Über die Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte, deren Determinanten nicht verschwinden, wollen wir folgendes als bekannt voraussetzen.

Die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Dreieckskoordinaten seien:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ &\quad + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ \varphi &= b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 \\ &\quad + 2b_{23}x_2x_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante des Kegelschnittbüschels $f + \lambda\varphi = 0$ wollen wir $\Delta(\lambda)$ nennen. Es ist also

$$\text{II.}\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminante zweiten Grades eines Elementes $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ soll mit $\Delta_{ik}(\lambda)$ bezeichnet werden. Die Determinante $\Delta(\lambda)$ ist in bezug auf λ eine ganze Funktion dritten Grades. Setzen wir diese gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 sein mögen. Kommen unter den Wurzeln mehrfache vor, so wollen wir die Anzahl von Malen, die eine von ihnen Wurzel der Gleichung ist, die Multiplizität dieser Wurzel nennen. Ebenso sind auch die $\Delta_{ik}(\lambda)$ ganze Funktionen von λ und zwar zweiten Grades.

Bei den beiden Kegelschnitten sind folgende 6 Fälle von Lagebeziehungen möglich:

1. Die Kegelschnitte schneiden sich in 4 getrennten Punkten.
2. Die Kegelschnitte berühren sich in 2 Punkten.
3. Die Kegelschnitte fallen zusammen.
4. Die Kegelschnitte berühren sich in einem und schneiden sich in 2 weiteren Punkten.
5. Die Kegelschnitte berühren sich in einem Punkt dreipunktig.
6. Die Kegelschnitte berühren sich in einem Punkt zweipunktig und schneiden sich in einem zweiten.

Der Fall 3 ist trivial und aus Gründen hinzugefügt, die später klar werden.

Die Bedingungen für das Eintreten der einzelnen Fälle hängen von der Determinante $\Delta(\lambda)$ ab. Sie ergeben sich aus folgender Tabelle:

III.

Es sind drei verschiedene Wurzeln vorhanden.	Es ist eine Doppelwurzel und eine einfache vorhanden.	Es ist eine dreifache Wurzel vorhanden.
1) Für eine einfache Wurzel verschwinden niemals alle $\Delta_{ik}(\lambda)$.	2) Für die Doppelwurzel verschwinden alle $\Delta_{ik}(\lambda)$.	3) Für die dreifache Wurzel verschwinden alle $\Delta_{ik}(\lambda)$ von der zweiten Ordnung.
	4) Für die Doppelwurzel verschwinden nicht alle $\Delta_{ik}(\lambda)$.	5) Für die dreifache Wurzel verschwinden alle $\Delta_{ik}(\lambda)$ von der ersten Ordnung.
		6) Für die dreifache Wurzel verschwinden nicht alle $\Delta_{ik}(\lambda)$.

Die einzelnen Fälle sind hier mit denselben Nummern bezeichnet wie oben. In dieser Tabelle ist jeder Fall durch zweierlei charakterisiert, nämlich erstens durch die Multiplizität der Wurzeln von $\Delta(\lambda)$, die aus der ersten Horizontalspalte zu entnehmen ist, zweitens durch eine Bedingung, die den $\Delta_{ik}(\lambda)$ auferlegt ist. Beides zusammen ist die hinreichende und notwendige Bedingung für das Eintreten eines bestimmten Falles. Wir wollen noch bemerken, daß die Eigenschaften von $\Delta(\lambda)$, aus denen diese Bedingungen gebildet sind, invariant sind. Wenn wir also unsere Kegelschnitte auf ein neues Koordinatensystem transformieren, dann bleiben sie auch in bezug auf die neue Determinante des Kegelschnittbüschels dieselben.

Die einfachsten Formen, in die unsere Kegelschnitte durch dieselbe Transformation übergeführt werden können, wollen wir die kanonischen nennen. Sie sind in den einzelnen Fällen folgende:

IV. 1) $\lambda_1' a_{11}' y_1^2 + \lambda_2' a_{22}' y_2^2 + \lambda_3' a_{33}' y_3^2 = 0,$
$a_{11}' y_1^2 + a_{22}' y_2^2 + a_{33}' y_3^2 = 0.$

2) $\lambda_1' (a_{11}' y_1^2 + a_{22}' y_2^2) + \lambda_3' a_{33}' y_3^2 = 0,$
$a_{11}' y_1^2 + a_{22}' y_2^2 + a_{33}' y_3^2 = 0.$

3) $\lambda_1' (a_{11}' y_1^2 + a_{22}' y_2^2 + a_{33}' y_3^2) = 0,$
$a_{11}' y_1^2 + a_{22}' y_2^2 + a_{33}' y_3^2 = 0.$

4) $2\lambda_1' a_{12}' y_1 y_2 + a_{22}' y_2^2 + \lambda_2' a_{33}' y_3^2 = 0,$
$2 a_{12}' y_1 y_2 + a_{33}' y_3^2 = 0.$

5) $\lambda_1' (2 a_{12}' y_1 y_2 + a_{33}' y_3^2) + a_{22}' y_2^2 = 0,$
$2 a_{12}' y_1 y_2 + a_{33}' y_3^2 = 0.$

6) $2 a_{12}' y_1 y_2 + \lambda_1' (2 a_{13}' y_1 y_3 + a_{22}' y_2^2) = 0,$
$2 a_{13}' y_1 y_3 + a_{22}' y_2^2 = 0.$

Es sind die in diesen Formen enthaltenen Größen

$$\lambda_j' = -\lambda_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

§ 2.

Die Untersuchungen bei Clebsch-Lindemann über die Lagebeziehungen zweier konzentrischer Kegelschnitte, Vorlesungen über Geometrie I, S. 141 bis 145.

Wir wollen, was den ersten Teil unserer Aufgabe betrifft, uns auf eine Ergänzung der Untersuchungen bei Clebsch-Lindemann beschränken. Wir finden dort die Lagebeziehungen zweier konzentrischer Kegelschnitte aus den Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte im allgemeinen abgeleitet. Die Bezeichnung der sechs Fälle von Lagebeziehungen im allgemeinen bei Lindemann weicht von unserer ab. Der Fall, der unserem Fall 1 entspricht, erscheint bei ihm als Hauptfall, die übrigen fünf Fälle nennt er die Ausnahmefälle und numeriert sie mit den Zahlen 1 bis 5. Zunächst stellt er bei seiner Ableitung für die konzentrischen Kegelschnitte einen entsprechenden Hauptfall auf. Bei der weiteren Untersuchung, welcher von den fünf Ausnahmefällen bei konzentrischen Kegelschnitten möglich ist, geht er von folgendem Gedanken aus. Bei den fünf Ausnahmefällen des allgemeinen Falls kommen auch solche vor, bei denen die Punkte gleicher Polaren mit ihren Polaren sämtlich zusammenfallen. Dies, bemerkt er Seite 144 oben, kann bei konzentrischen Kegelschnitten nicht stattfinden, denn hier ist uns immer ein Punkt gleicher Polaren gegeben, der mit seinen Polaren nicht zusammenfällt. Es ist das der Mittelpunkt der Kegelschnitte, der in bezug auf beide dieselbe Polare, nämlich die unendlich ferne Gerade, besitzt. Es können hier also nur diejenigen Fälle eintreten, bei denen mindestens ein Punkt gleicher Polaren von seiner Polaren getrennt liegt. Dies ist aber außer in den zwei von ihm genannten Fällen 1 und 2, nach unserer Bezeichnung 2 und 4, auch noch im Fall 4 möglich. Der Fall 4 entspricht unserm Fall 5. Im Fall 5 können wir nämlich die Gleichungen unserer

beiden Kegelschnitte immer auf folgende Form transformieren:

$$\lambda_1' (2\, a_{12}'\, y_1\, y_2 + a_{33}'\, y_3^2) + a_{22}'\, y_2^2 = 0,$$
$$2\, a_{12}'\, y_1\, y_2 + a_{33}'\, y_3^2 = 0.$$

Wir sehen aus diesen Gleichungen, daß jeder Punkt der Geraden $y_2 = 0$ ein Punkt gleicher Polaren ist, der, wenn wir von dem Punkt 1, 0, 0 absehen, nicht mit seiner Polare zusammenfällt. Denn bezeichnen wir die Koordinaten eines solchen Punktes mit y_1^0, 0, y_3^0, so ist die Gleichung der Polare dieses Punktes in bezug auf beide Kegelschnitte:

$$\lambda_1'\, a_{12}'\, y_1^0\, y_2 + a_{33}'\, y_3^0\, y_3 = 0.$$

Von diesem Gesichtspunkte aus ist also der von Clebsch-Lindemann mit 4 bezeichnete Fall bei konzentrischen Kegelschnitten ebenso möglich, wie die Fälle 1 und 2. Wir sehen sofort, daß er auch wirklich eintritt, wenn wir in die kanonische Form der beiden Kegelschnitte für y_1, y_2, y_3 resp. x, y, t, wo x, y, t homogene kartesische Koordinaten sein sollen, setzen. Die Gleichungen lauten dann:

$$\lambda_1' (2\, a_{12}'\, xy + a_{33}'\, t^2) + a_{22}'\, y^2 = 0,$$
$$2\, a_{12}'\, xy + a_{33}'\, t^2 = 0.$$

Es sind dies die Gleichungen zweier konzentrischer Kegelschnitte, deren Lagebeziehungen die des Falles 4 sind. Sie haben nämlich im Unendlichfernen eine dreipunktige Berührung. Dieser Fall ist also bei konzentrischen Kegelschnitten in der Tat möglich.

Die Lagebeziehungen zweier konzentrischer Oberflächen zweiter Ordnung.

§ 3.

Voraussetzungen aus der Theorie der Lagebeziehungen zweier Oberflächen zweiter Ordnung.

Die Gleichungen zweier Oberflächen zweiter Ordnung f und φ mit nicht verschwindender Determinante in Tetraëderkoordinaten seien:

I. $$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

$$\varphi = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{14}x_1x_4 + 2b_{24}x_2x_4 + 2b_{34}x_3x_4 = 0.$$

Die Determinante des Büschels $f + \lambda\varphi = 0$ sei wieder $\Delta(\lambda)$. Es ist

II. $$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} & a_{14}+\lambda b_{14} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} & a_{24}+\lambda b_{24} \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} & a_{34}+\lambda b_{34} \\ a_{41}+\lambda b_{41} & a_{42}+\lambda b_{42} & a_{43}+\lambda b_{43} & a_{44}+\lambda b_{44} \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminanten dritten Grades eines Elements $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ von $\Delta(\lambda)$ wollen wir Δ_{ik} nennen.

Die Unterdeterminanten zweiten Grades, die wir erhalten, wenn wir die Horizontal- und die Vertikal-Reihen zweier Elemente $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ und $a_{lm} + \lambda b_{lm}$ in $\Delta(\lambda)$ fortlassen, wollen wir mit $\Delta_{iklm}(\lambda)$ bezeichnen.

Die Determinanten $\Delta(\lambda)$, $\Delta_{ik}(\lambda)$, $\Delta_{iklm}(\lambda)$ sind wieder ganze Funktionen von λ. Die Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ wollen wir λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 nennen.

Die möglichen Fälle von Lagebeziehungen sollen hier nicht direkt beschrieben werden, sondern durch die zerfallenden Flächen des Büschels $f + \lambda \varphi = 0$ charakterisiert werden. Bekanntlich gibt es in jedem Büschel vier solche Flächen, die die Gleichungen

$$f + \lambda_1 \varphi = 0. \quad f + \lambda_2 \varphi = 0. \quad f + \lambda_3 \varphi = 0. \quad f + \lambda_4 \varphi = 0$$

haben. Es gehört also zu jeder Wurzel eine solche Fläche. Fallen mehrere Wurzeln zusammen, so soll die zu einer mehrfachen Wurzel gehörige Fläche entsprechend mehrfach gezählt werden. Die zerfallenden Flächen sind in den dreizehn möglichen Fällen von Lagebezeichnungen die folgenden:

1. vier einfach zählende Kegel;
2. ein doppelt zählendes Ebenenpaar und zwei einfach zählende Kegel;
3. zwei doppelt zählende Ebenenpaare;
4. eine dreifach zählende Doppelebene und ein einfach zählender Kegel;
5. ein doppelt zählender Kegel und zwei einfach zählende Kegel;
6. ein doppelt zählendes Ebenenpaar und ein doppelt zählender Kegel;
7. ein dreifach zählendes Ebenenpaar und ein einfach zählender Kegel;
8. eine vierfach zählende Doppelebene;
9. zwei doppelt zählende Kegel;
10. ein vierfach zählendes Ebenenpaar;
11. ein dreifach zählender Kegel und ein einfach zählender Kegel;
12. ein vierfach zählendes Ebenenpaar;
13. ein vierfach zählender Kegel.

Die Bedingungen für das Eintreten eines dieser aufgezählten Fälle ergeben sich wieder aus invarianten Eigenschaften von $\Delta(\lambda)$. Wir entnehmen sie aus der Tabelle III, die der Tabelle III in § 1 analog eingerichtet ist.

III.	Die Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ sind verschieden.	Es sind eine Doppelwurzel und zwei einfache vorhanden.	Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden.	Es ist eine dreifache und eine einfache Wurzel vorhanden.	Es ist eine vierfache Wurzel vorhanden.
	I. 1. Für eine einfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ niemals alle Null.	2. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	3. Für die beiden Doppelwurzeln sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	4. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung.	
	II.	5. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.	6. Für die eine Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	7. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.	8. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung, die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.
	III		9. Für keine Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.		10. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung, die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ sind nicht alle Null.
	IV.			11. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.	12. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.
	V.				13. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle gleich Null.

Über die kanonischen Formen wollen wir nichts voraussetzen und zu dieser Klassifikation nur noch bemerken, daß sie sich aus der bekannten Elementarteilertheorie von Weierstraß ergibt.

Weiter werden wir noch von folgendem öfter Gebrauch machen. Bekanntlich gibt es im Raum ausgezeichnete Punkte, die in bezug auf beide Oberflächen dieselbe Polarebene haben. Bezeichnen wir die Koordinaten dieser Punkte gleicher Polarebenen mit $x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}$, $x_3^{(j)}$, $x_4^{(j)}$, so können wir aus folgenden vier Gleichungen berechnen:

$$1)\quad (a_{k1}+\lambda_j b_{k1})\,x^{(j)} + (a_{k2}+\lambda_j\, b_{k2})\,x_2^{(j)} + (a_{k3}+\lambda_j\, b_{k3})\,x_3^{(j)} + (a_{k4}+\lambda_j\, b_{k4})\,x_4^{(j)} = 0.$$

$$K = 1, 2, 3, 4.^*)$$

Die Größen λ_j sind wieder die Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$. Für jede Wurzel λ_j haben wir ein solches System von Gleichungen, die wegen $\Delta(\lambda_j) = 0$ immer auflösbar sind.

Setzen wir voraus:

1. Die $\Delta_{ik}(\lambda)$ sind für eine Wurzel λ_j nicht alle gleich Null.

Die Gleichungen geben uns dann zu jeder solchen Wurzel λ_j einen bestimmten Punkt gleicher Polarebenen. Dieser Punkt ist dann die Spitze des Kegels $f + \lambda_j \varphi = 0$.

2. Die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ sind für ein λ_j nicht alle gleich Null, wohl aber die $\Delta_{ik}(\lambda)$.

Die Gleichungen geben uns für das betreffende λ_j eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten, die auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist die Doppellinie des Ebenenpaars $f + \lambda_j \varphi = 0$.

*) Über diese Gleichungen vgl. Clebsch-Lindemann, Geometrie des Raumes, Band I, Seite 208.

3. Die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ sind für ein λ_j alle gleich Null, nicht aber alle $a_{ik} + \lambda b_{ik}$.

Die Gleichungen geben uns für eine solche Wurzel eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten, die auf einer Ebene liegen. Es ist dies die Doppelebene $f + \lambda_j \varphi = 0$.

Nach diesen Voraussetzungen aus der allgemeinen Theorie wollen wir noch die Bezeichnungen für unser Problem festlegen.

Die Gleichungen unserer konzentrischen Oberflächen, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt als Anfangspunkt seien folgende:

I. a.
$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 1 = 0.$$
$$\varphi = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + 1 = 0.$$

Es ist das konstante Glied $= 1$ angenommen, um anzudeuten, daß es nicht Null werden soll. Ferner soll noch vorausgesetzt werden, daß

$$\text{weder } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ noch } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen haben wir es immer mit zwei eigentlichen Flächen zu tun. Die Determinante des Büschels $f + \lambda \varphi = 0$ und ihre Unterdeterminanten sollen genau so bezeichnet werden wie im allgemeinen Fall.

§ 4.

Unterschied unseres Problems und des allgemeinen und die dadurch bedingte nochmalige Teilung einiger Fälle.

Bei der Betrachtung der Lagebeziehungen zweier beliebiger Oberflächen, die in Tetraëderkoordinaten durchgeführt wird, wird zwischen dem Endlichen und Unendlichfernen kein Unterschied gemacht. Bei unserm Problem ist aber die unendlichferne Ebene als Polarebene des gemeinsamen Mittelpunktes von vornherein vor den andern ausgezeichnet. Wir haben deswegen die Gleichungen unserer Oberflächen in kartesischen Koordinaten angenommen. Die Determinante $\Delta(\lambda)$ unseres Oberflächenbüschels $f + \lambda\varphi = 0$ ist folgende:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} & 0 \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} & 0 \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

Es ist also $\Delta(\lambda) = \Delta_{44}(\lambda)(1+\lambda)$.

Eine Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$ ist also immer gleich -1. Die übrigen 3 sind die Wurzeln von $\Delta_{44}(\lambda) = 0$. Wir sehen daher, daß auch unter den Wurzeln die eine Wurzel $\lambda = -1$ vor den andern ausgezeichnet ist. Es soll zunächst festgestellt werden, ob zwischen der Wurzel $\lambda = -1$ und der unendlichfernen Ebene ein Zusammenhang besteht und welcher.

Zu diesem Zweck benutzen wir die Gleichungen § 3, 1. Um die Form, die diese Gleichungen bei konzentrischen Oberflächen annehmen, zu finden, schreiben wir die Gleichungen § 3, 1. a. homogen, d. h. wir multiplizieren beide mit einem Faktor t und setzen für xt, yt, zt wieder x, y, z. Wenn wir dann die Koordinaten der Punkte gleicher Polarebenen mit x_j, y_j, z_j, t_j bezeichnen, nehmen die Gleichungen § 3, 1 folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & (a_{11}+\lambda_j b_{11})\,x_j+(a_{12}+\lambda_j b_{12})\,y_j+(a_{13}+\lambda_j b_{13})\,z_j=0.\\
& (a_{21}+\lambda_j b_{21})\,x_j+(a_{22}+\lambda_j b_{22})\,y_j+(a_{23}+\lambda_j b_{23})\,z_j=0.\\
& (a_{31}+\lambda_j b_{31})\,x_j+(a_{32}+\lambda_j b_{32})\,y_j+(a_{33}+\lambda_j b_{33})\,z_j=0.\\
& (1+\lambda_j)\,t_j=0.
\end{aligned}
$$

Bei der Auflösung müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1) $\lambda_j \neq -1.$

Wegen der vierten Gleichung muß dann $t_j = 0$ sein. Es gehören also zu $\lambda_j \neq -1$ nur unendlichferne Punkte gleicher Polaren.

2) $\lambda_j = -1.$

Die Gleichungen werden erfüllt durch Punkte gleicher Polaren, zu denen immer der Punkt $0, 0, 0, t$ also der Mittelpunkt gehört.

Wir sehen hieraus, daß zwischen der Wurzel $\lambda = -1$ und der unendlichfernen Ebene einerseits und zwischen den Wurzeln $\lambda \neq -1$ und dem Mittelpunkt andererseits ein ganz bestimmter Zusammenhang*) besteht.

Die Klassifikation der Lagebeziehungen zweier Oberflächen im allgemeinen erfolgte nach gewissen Eigenschaften der Wurzeln von $\Delta(\lambda)$. Wenn wir jetzt das Endliche und das Unendlichferne getrennt behandeln wollen, so müssen wir wegen des erwähnten Zusammenhangs bei der Klassifikation unterscheiden, ob eine Bedingung für eine Wurzel $\lambda \neq -1$ oder für $\lambda = -1$ erfüllt ist. Bei den Fällen, bei denen die Multiplizität und die Bedingungen für alle Wurzeln dieselben sind, macht eine solche Unterscheidung nichts aus. Die andern Fälle müssen wir aber noch einmal teilen. Wenn wir dies in der Tabelle § 3, III tun, nimmt sie folgende Gestalt an. Die noch einmal geteilten Fälle sind durch a und b unterschieden:

*) Dieser Zusammenhang wird noch klarer in § 6, wo diese Betrachtung weiter verfolgt wird.

Die Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ sind verschieden.	$\lambda \neq -1$ ist eine Doppelwurzel.	$\lambda = -1$ ist eine Doppelwurzel.	Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden.	
I. 1. Für eine einfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ niemals alle Null.	2a. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	2b. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	3. Für die beiden Doppelwurzeln sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	
II.	5a. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.	5b. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.	6a. Nur für die Doppelwurzel $\lambda \neq -1$ sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	6b. Nur für die Doppelwurzel $\lambda = -1$ sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.
III.			9. Für keine Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null.	
IV.				
V.				

$\lambda \neq -1$ ist eine dreifache Wurzel.	$\lambda = -1$ ist eine dreifache Wurzel.	Es ist eine vierfache Wurzel vorhanden.
4a. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung.	4b. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung.	
7a. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.	7b. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.	8. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung, die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.
		10. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung, die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ nicht alle Null.
11a. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.	11b. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.	12. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.
		13. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.

§ 5.

Ausscheidung der bei konzentrischen Oberflächen unmöglichen Fälle.

Unter den in der Tabelle des § 4 aufgezählten Fälle müssen die für konzentrische Oberflächen möglichen natürlich enthalten sein. Es brauchen aber nicht alle möglich zu sein, weil wir es hier mit zwei speziellen Oberflächen zu tun haben. Aus der Form von $\Delta(\lambda)$ bei konzentrischen Oberflächen folgt dann auch, daß sechs Fälle nicht eintreten können. Es ist

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} & 0 \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} & 0 \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

Von den Unterdeterminanten dritten Grades von $\Delta(\lambda)$ haben 9 den Wert $\Delta_{44ik}(\lambda)(\lambda+1)$, wo ik die 9 Variationen mit Wiederholung der Elemente 1, 2, 3 zur zweiten Klasse sind, eine weitere ist $\Delta_{44}(\lambda)$, die übrigen sind gleich Null.

Von den Unterdeterminanten zweiten Grades von $\Delta(\lambda)$ haben 9 den Wert $(a_{ik}+b_{ik})(\lambda+1)$, 9 weitere den Wert $\Delta_{44ik}(\lambda)$, wo ik dieselben Variationen sind, die übrigen sind Null.

Ist $\lambda=-1$ nun eine mehrfache Wurzel, so muß es auch eine Wurzel von $\Delta_{44}(\lambda)$ sein. In den übrigen $\Delta_{ik}(\lambda)$ kommt $1+\lambda$ als Faktor vor. Es müssen in diesem Fall also alle Unterdeterminanten ersten Grades verschwinden.

Nehmen wir an, die $\Delta_{ik}(\lambda)$ verschwinden von einer höheren Ordnung als Eins, so ist $\lambda=-1$ auch eine Wurzel der $\Delta_{44ik}(\lambda)$. Da in den übrigen Unterdeterminanten zweiten Grades wieder der Faktor $\lambda+1$ vorkommt, so sind in diesem Fall auch alle Unterdeterminanten zweiten Grades gleich Null.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die sechs Fälle 5b, 6a, 9, 10, 11b und 13 bei konzentrischen Oberflächen nicht vorkommen können.

Die anderen Fälle treten tatsächlich ein. Dies geht allerdings hieraus noch nicht hervor, denn es könnte noch andere Gründe geben, die einzelne von ihnen unmöglich machen. Wir werden dafür im § 7 einen strengen Beweis liefern. In der Tafel der möglichen Fälle wollen wir die Horizontalreihen III und V, die überhaupt keine Fälle enthalten, fortlassen und die Fälle neu nummerieren. Wir haben dann definitiv folgende Tabelle von möglichen Fällen:

Die Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ sind verschieden.	$\lambda \neq -1$ ist eine Doppelwurzel.	$\lambda = -1$ ist eine Doppelwurzel.	Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden.	$\lambda \neq -1$ ist eine dreifache Wurzel.	$\lambda = -1$ ist eine dreifache Wurzel.	Es ist eine vierfache Wurzel vorhanden.
I. 1. Für eine einfache Wurzel sind niemals alle $\Delta_{ik}(\lambda)$ gleich Null.	2. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle gleich Null.	3. Für die Doppelwurzel sind $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle gleich Null.	4. Für die beiden Doppelwurzeln sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle gleich Null.	5. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle gleich Null von der zweiten Ordnung.	6. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle gleich Null von der zweiten Ordnung.	
II.	7. Für die Doppelwurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle gleich Null.		8. Nur für die Doppelwurzel $\lambda = -1$ sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle gleich Null.	9. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.	10. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der ersten Ordnung.	11. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ alle Null von der zweiten Ordnung, die $\Delta_{iklm}(\lambda)$ Null von der ersten Ordnung.
III.				12. Für die dreifache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ nicht alle Null.		13. Für die vierfache Wurzel sind die $\Delta_{ik}(\lambda)$ Null von der ersten Ordnung.

§ 6.
Die singulären Flächen.

In dem Oberflächenbüschel finden sich, wie im § 3 erwähnt wurde, entsprechend den vier Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ auch vier zerfallende Flächen, wenn man die zu den mehrfachen Wurzeln gehörigen Flächen mehrfach zählt. Bei unserem Problem sind es die Flächen

$$f + \lambda_1 \varphi = 0, \quad f + \lambda_2 \varphi = 0, \quad f + \lambda_3 \varphi = 0, \quad f - \varphi = 0.$$

Wir wollen nun feststellen, welche Gestalt und Lage diese Flächen in den einzelnen Fällen des § 5 haben. Da jeder der im § 5 aufgestellten Fälle ein Spezialfall von den dreizehn Fällen ist, die bei zwei Oberflächen überhaupt möglich sind, so wissen wir schon, ob die zerfallenden Flächen in den einzelnen Fällen Kegel oder Ebenenpaare oder Doppelebenen sind. Hier soll jetzt noch untersucht werden, welche spezielle Gestalt sie bei konzentrischen Flächen annehmen. Zu diesem Zwecke knüpfen wir an die Betrachtungen des § 4 über die Lage von Punkten gleicher Polarebenen bei konzentrischen Flächen wieder an. Wir hatten zur Berechnung dieser Punkte für jede Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$ das System der vier Gleichungen § 4, 1. aufgestellt. Bei der Auflösung mußten wir zwei Fälle unterscheiden:

1) $\qquad \lambda_j \neq -1.$

Die Gleichungen wurden nur für unendlichferne Punkte erfüllt. Im § 3 war erwähnt, daß die Punkte gleicher Polaren, die sich bei der Auflösung eines zu einer Wurzel λ_j gehörigen Systems ergeben, die Doppelpunkte der singulären Fläche $f + \lambda_j \varphi = 0$ sind. Verbinden wir dies mit einander, so sehen wir, daß die singulären Flächen $f + \lambda_j \varphi = 0$, wo $\lambda_j \neq -1$ ist, nur Flächen mit unendlichfernen Doppelpunkten sein können. Wir werden also da, wo wir im allgemeinen Fall Kegel, Ebenenpaare und

Doppelebenen hatten, jetzt entsprechend Cylinder, parallele Ebenenpaare und unendlichferne Doppelebenen haben.

2) $\lambda = -1$.

Zu den Punkten gleicher Polarebenen gehörte immer der Mittelpunkt der beiden konzentrischen Flächen.

Es muß also die zerfallende Fläche $f - \varphi = 0$ den Mittelpunkt als Doppelpunkt haben. Eine solche Fläche muß also entweder ein Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze, ein Ebenenpaar mit einer Doppellinie durch den Mittelpunkt oder eine Doppelebene durch den Mittelpunkt sein und zwar wird einer von diesen drei Fällen eintreten, wenn wir im allgemeinen resp. einen Kegel, ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene haben. Wir können aus der Verteilung der Wurzeln jetzt unmittelbar angeben, welche spezielle Gestalt die im § 3 angeführten zerfallenden Flächen in den bei konzentrischen Flächen möglichen Fällen haben.

Wir haben im Fall

1. einen einfach zählenden Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze und drei einfach zählende Cylinder;
2. zwei doppelt zählende Parallelebenen, einen einfach zählenden Cylinder und einen einfach zählenden Kegel;
3. zwei einfach zählende Cylinder und ein doppelt zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt;
4. ein doppelt zählendes Parallelebenenpaar und ein doppelt zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt;
5. eine dreifach zählende unendlichferne Doppelebene und einen einfach zählenden Kegel;
6. einen einfach zählenden Cylinder und eine dreifach zählende Doppelebene durch den Mittelpunkt;
7. einen doppelt zählenden Cylinder, einen einfach zählenden Cylinder und einen einfach zählenden Kegel;

8. einen doppelt zählenden Cylinder und ein doppelt zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt;
9. ein dreifach zählendes Parallelebenenpaar und einen einfach zählenden Kegel;
10. einen einfach zählenden Cylinder und ein dreifach zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt;
11. eine vierfach zählende Doppelebene durch den Mittelpunkt;
12. einen dreifach zählenden Cylinder und einen einfach zählenden Kegel;
13. ein vierfach zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt.

§ 7.

Die kanonischen Formen.

Die weitere Untersuchung der einzelne Fälle wird sehr erleichtert, wenn wir den Fällen ihre kanonische Form zu Grunde legen. Bei der Transformation auf diese Formen wollen wir den Koordinatenanfangspunkt unverändert lassen und uns auf eine Drehung der Achsen beschränken.

Bezeichnen wir die neuen Achsen der Reihe nach mit X', Y', Z' und die Richtungskosinus der X'-Achse gegen die alten Achsen mit a_1, a_2, a_3 und ebenso die Richtungskosinus der Y'- und Z'-Achse mit b_1, b_2, b_3 resp. c_1, c_2, c_3, so lauten die Transformationsformeln:

$$1) \qquad \begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z'. \end{aligned}$$

Zwischen den Richtungskosinus bestehen die Gleichungen

$$2) \qquad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Bei einer solchen Transformation werden offenbar nur die

ersten sechs Glieder der Gleichungen § 3, I. a. verändert. Es kommt also nur darauf an, zwei bilineare Formen von der Form

$$3) \quad \begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz, \\ &b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz \end{aligned}$$

durch eine Transformation von der Form 1 auf ihre einfachste Form zu transformieren. Diese bilinearen Formen sind gleich Null gesetzt, die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Dreieckskoordinaten. Wir können sie durch folgende Transformation:

$$4) \quad \begin{aligned} x &= \beta_1' y_1 + \beta_1'' y_2 + \beta_1''' y_3 \\ y &= \beta_2' y_1 + \beta_2'' y_2 + \beta_2''' y_3 \\ z &= \beta_3' y_1 + \beta_3'' y_2 + \beta_3''' y_3 \end{aligned}$$

immer auf eine von den sechs kanonischen Formen § 1, IV. bringen. Wir sehen also, daß ein dem unserigen sehr ähnliches Problem bereits gelöst ist. Der Unterschied zwischen diesen beiden Problemen besteht nur in den Transformationsformeln. Die Transformationsformeln 4 sind allgemeiner als die Formeln 1, da zwischen den Koeffizienten der Formeln 4 keine Gleichungen bestehen. Unter einer gewissen Bedingung können wir aber den Formeln 4 die Gestalt der Formeln 1 geben. Bekanntlich sind die Koeffizienten der y_1, y_2, y_3 in den Formeln 4 nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Ersetzen wir die Formeln 4 durch folgende:

$$5) \quad \begin{aligned} x &= m_1 \beta_1' y_1 + m_2 \beta_1'' y_2 + m_3 \beta_1''' y_3 \\ y &= m_1 \beta_2' y_1 + m_2 \beta_2'' y_2 + m_3 \beta_2''' y_3 \\ z &= m_1 \beta_3' y_1 + m_2 \beta_3'' y_2 + m_3 \beta_3''' y_3, \end{aligned}$$

wo m_1, m_2, m_3 konstante Größen sind, so erhalten wir dieselben kanonischen Formen. Es folgt das unmittelbar daraus, daß man die Größen m_i zu den y_i nehmen kann. Wir haben also in der kanonischen Form statt y_1, y_2, y_3 jetzt $m_1 y_1$, $m_2 y_2$, $m_3 y_3$. Die kanonische Form wird also nur in den Koeffizienten geändert, die unwesentlich sind. Den Formeln 5 können wir unmittelbar die Form der

Formeln 1 geben. Wir brauchen nur die willkürlichen Größen m_i durch folgende drei Gleichungen zu bestimmen:

$$6) \quad \begin{aligned} &(m_1\,\beta_1')^2 + (m_1\,\beta_2')^2 + (m_1\,\beta_3')^2 = 1 \\ &(m_2\,\beta_1'')^2 + (m_2\,\beta_2'')^2 + (m_2\,\beta_3'')^2 = 1 \\ &(m_3\,\beta_1''')^2 + (m_3\,\beta_2''')^2 + (m_3\,\beta_3''')^2 = 1. \end{aligned}$$

Die oben erwähnte Bedingung ist also die, daß die Gleichungen 6 nach den m_i auflösbar sind. Ist sie erfüllt, so ist die Umformung der Formeln 4 in der angegebenen Weise immer möglich. Wenn das nicht der Fall ist, wollen wir den Transformationsformeln 4 ihre ursprüngliche Gestalt lassen.*)

Nach § 1 IV. können wir die Gleichungen zweier Kegelschnitte immer auf eine von den 6 Formen IV. transformieren. Wir haben dem entsprechend also auch 6 Formen, in die sich unsere Oberflächen überführen lassen.

$$1) \quad \begin{aligned} &\lambda_1'\,a_{11}'\,x'^2 + \lambda_2'\,a_{22}'\,y'^2 + \lambda_3'\,a'_{33}\,z'^2 + 1 = 0 \\ &a_{11}'\,x'^2 + a_{22}'\,y'^2 + a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} &\lambda_1'\,(a_{11}'\,x'^2 + a_{22}'\,y'^2) + \lambda_3'\,a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \\ &a_{11}'\,x'^2 + a_{22}'\,y'^2 + a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} &\lambda_1'\,(a_{11}'\,x'^2 + a_{22}'\,y'^2 + a_{33}'\,z'^2) + 1 = 0 \\ &a_{11}'\,x'^2 + a_{22}'\,y'^2 + a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} &2\,\lambda_1'\,a_{12}'\,x'\,y' + a_{22}'\,y'^2 + \lambda_2'\,a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \\ &2\,a_{12}'\,x'\,y' + a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$5) \quad \begin{aligned} &\lambda_1'\,(2\,a_{12}'\,x'\,y' + a_{33}'\,z'^2) + a_{22}'\,y'^2 + 1 = 0 \\ &2\,a_{12}'\,x'\,y' + a_{33}'\,z'^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$6) \quad \begin{aligned} &2\,a_{12}'\,x'\,y' + \lambda_1'\,(2\,a_{13}'\,x'\,z' + a_{22}\,y'^2) + 1 = 0 \\ &2\,a_{13}'\,x'\,z' + a_{22}'\,y'^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Die λ_j' für $j = 1, 2, 3$ sind die negativen Wurzeln von $\Delta_{44}(\lambda) = 0$, wenn $\Delta(\lambda)$ wieder die Determinante des Oberflächenbüschels $f + \lambda\varphi = 0$ ist.

Wie man sieht, sind die 6 Formen alle, in den Formen 1, 4 und 6 enthalten, wenn man voraussetzt, daß in diesen

*) Da es für die kanonischen Formen gleichgültig ist, ob wir die Transformation mit Hülfe der Formeln 1 oder 4 vornehmen, wollen wir die Untersuchung über die Transformationsformeln hier abbrechen. Wir werden in § 9, 1 darauf zurückkommen.

3 Formen die λ_j' alle oder teilweise denselben Wert annehmen können. Es müssen also die Gleichungen zweier konzentrischer Oberflächen sich immer auf eine Form transformieren lassen, die sich unter die Form 1, 4 oder 6 subsumiert.

Wir wollen nun untersuchen, ob zu jedem der im § 5 angeführten 13 Fälle eine solche Form gehört und welche. Da die Fälle im § 5 durch invariante Eigenschaften der Determinante $\Delta(\lambda)$ und ihrer Unterdeterminanten charakterisiert sind, wollen wir für unsere bei konzentrischen Oberflächen allein möglichen Formen diese Größen bilden und sehen, ob sie die in den einzelnen Fällen verlangten Eigenschaften besitzen. Bei den Formen, die sich unter 1 subsumieren, ist

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}'(\lambda+\lambda_1') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}'(\lambda+\lambda_2') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}'(\lambda+\lambda_3') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}'\, a_{22}'\, a_{33}'\,(\lambda+\lambda_1')\,(\lambda+\lambda_2')\,(\lambda+\lambda_3')\,(\lambda+1).$$

Die $\Delta_{ik}(\lambda)$, die nicht Null sind, haben folgende Werte:
$a_{11}'a_{22}'a_{33}'(\lambda+\lambda_1')(\lambda+\lambda_2')(\lambda+\lambda_3')$, $a_{11}'a_{22}'(\lambda+\lambda_1')(\lambda+\lambda_2')(\lambda+1)$,
$a_{11}'a_{33}'(\lambda+\lambda_1')(\lambda+\lambda_3')(\lambda+1)$, $a_{22}'a_{33}'(\lambda+\lambda_2')(\lambda+\lambda_3')(\lambda+1)$.

Lassen wir nun die Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ teilweise oder ganz denselben Wert annehmen, wie es die erste Horizontalspalte in § 5 angiebt und untersuchen in jedem Fall, welche Werte die $\Delta_{ik}(\lambda)$ für die betreffenden Wurzeln haben, so sehen wir, daß die $\Delta_{ik}(\lambda)$ der Reihe nach die bei den Fällen der Horizontalspalte I verlangten Eigenschaften haben.

Wir erhalten also die kanonischen Formen für die Fälle der Horizontalspalte I, wenn wir in der Form 1 die Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ ganz oder teilweise zusammenfallen lassen.

Ebenso verfahren wir bei den Formen, die sich unter 4 und 6 subsumieren. Bei 4 ist

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}'(\lambda+\lambda_1') & 0 & 0 \\ a_{12}'(\lambda+\lambda_1') & a_{22}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}'(\lambda+\lambda_2') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}'^2 a_{33}' (\lambda+\lambda_1')^2 (\lambda+\lambda_2') (\lambda+1).$$

Die $\Delta_{ik}(\lambda)$, die nicht Null sind, haben die Werte $a_{22}' a_{33}' (\lambda+\lambda_2') (\lambda+1)$, $-a_{12}' a_{33}' (\lambda+\lambda_1') (\lambda+\lambda_2') (\lambda+1)$, $-a_{12}'^2 (\lambda+\lambda_1')^2 (\lambda+1)$, $-a_{33}' a_{12}'^2 (\lambda+\lambda_1)^2 (\lambda+\lambda_2')$.

Bei 6 ist

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}' & a_{13}'(\lambda+\lambda_1') & 0 \\ a_{12}' & a_{22}'(\lambda+\lambda_1') & 0 & 0 \\ a_{13}'(\lambda+\lambda_1') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{13}'^2 a_{22}' (\lambda+\lambda_1')^3 (\lambda+1).$$

Die $\Delta_{ik}(\lambda)$ sind

$$-a_{13}' a_{22}' (\lambda+\lambda_1')^2 (\lambda+1), \quad -a_{13}'^2 (\lambda+\lambda_1')^2 (\lambda+1),$$
$$-a_{13}'^2 a_{22}' (\lambda+\lambda_1')^3, \quad a_{12}' a_{13}' (\lambda+\lambda_1') (\lambda+1), \quad -a_{12}'^2 (\lambda+1).$$

Wir sehen also ebenso, daß wir die kanonischen Formen der Horizontalspalten II und III erhalten, wenn wir in den Formen 4 resp. 6 die Wurzeln ganz oder teilweise zusammenfallen lassen.

Hiermit ist zu gleicher Zeit der Beweis geliefert, daß die in § 5 vorläufig als möglich angenommenen Fälle tatsächlich eintreten.

Schreiben wir die kanonischen Gleichungen homogen und setzen $t = 0$, so sind die noch übrigbleibenden Glieder die Gleichungen der Schnittkurven unserer Oberflächen mit der unendlichfernen Ebene. Diese Schnittkurven sind Kegelschnitte, deren Lagebeziehungen man aus der Form ihrer Gleichungen nach § 1 feststellen kann. Sie ergeben sich für die einzelnen Fälle aus folgender Tabelle. Die Zahlen 1 bis 6 bei den einzelnen Fällen bedeuten nach § 1 die verschiedenen Fälle von Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte auf einer Ebene.

Die Wurzeln von $\Delta\lambda$ sind verschieden.	$\lambda \neq -1$ ist eine Doppelwurzel.	$\lambda = -1$ ist eine Doppelwurzel.	Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden.	$\lambda \neq -$ ist eine dreifache Wurzel.	$\lambda = -1$ ist eine dreifache Wurzel.	Es ist eine vierfache Wurzel vorhanden.
I. 1. 1.	2. 2.	3. 1.	4. 2.	5. 3.	6. 2.	
II.	7. 4.		8. 4.	9. 5.	10. 4.	11. 5.
III.				12. 6.		13. 6.

Wir sehen, daß auch auf diese Weise jeder Fall vollständig von den anderen unterschieden wird. Wir haben also eine neue Form unserer Klassifikationsmethode, bei der der einzelne Fall durch die Multiplizität der Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einerseits und durch die Lagebeziehungen der unendlichfernen Kegelschnitte andererseits charakterisiert ist.

§ 8.

Allgemeine Bemerkungen über sämtliche Fälle.

Bevor wir unter Zugrundelegung der kanonischen Formen die einzelnen Fälle beschreiben, wollen wir einige Bemerkungen zusammenstellen, die sich auf alle beziehen. Auf diese werden wir dann bei den einzelnen Fällen verweisen. Wir nehmen die Flächen wieder in ihrer allgemeinsten Form § 3, I a an.

1.

Bedeutung der Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene.

Im vorigen Paragraphen hat es sich gezeigt, daß sich die Transformation zweier konzentrischer Flächen auf ihre kanonische Form auf die Transformation zweier Kegelschnitte f' und φ' zurückführen läßt. Es war

$$f' = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0.$$
$$\varphi' = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{23}yz + 2b_{13}xz = 0.$$

Es sind dies die unendlichfernen Kegelschnitte der Flächen. Unter den singulären Flächen des Oberflächenbüschels waren nach § 6 auch solche, deren singuläre Punkte alle unendlichfern lagen. Die unendlichfernen Kegelschnitte dieser Flächen sind mit den Linienpaaren des unendlichfernen Kegelschnittbüschels $f' - \lambda\varphi' = 0$ identisch. Die unendlichfernen Kegelschnitte geben uns also Aufschluß über die Lage der betreffenden singulären Flächen.

Ebenso sind die unendlichfernen Punkte der Durchmesser der beiden Flächen, die in bezug auf jede von ihnen dieselbe konjugierte Ebene haben, identisch mit den Punkten gleicher Polaren der unendlichfernen Kegelschnitte. Diese Punkte gleicher Polaren sind bekanntlich die singulären Punkte der Linienpaare. Wir können also aus den Lagebeziehungen der unendlichfernen Kegel-

schnitte auch sofort die Anzahl und Richtung der genannten Durchmesser ersehen.

Wir wollen hieran noch den Beweis knüpfen, daß die Durchmesser, die in bezug auf beide Flächen dieselbe konjugierte Ebene haben, alle reell sind, wenn eine der Flächen ein Ellipsoid ist. Es ist dies zwar eine bekannte Tatsache (vgl. Clebsch-Lindemann, Bd. II, S. 168, Anmerkungen). Wir wollen aber den sehr einfachen Beweis, der sich in diesem Zusammenhange ergiebt, hier noch anführen.

Es genügt zu diesem Beweise, wenn wir zeigen, daß die Punkte gleicher Polaren der unendlichfernen Kegelschnitte reell sind. Diese Punkte sind nach dem Vorigen die Schnittpunkte der Linien, die die gemeinsamen Punkte der unendlichfernen Kegelschnitte verbinden. Bezeichnen wir diese gemeinsamen Punkte mit 1, 2, 3, 4, so ergeben sie sich als Schnittpunkte der Verbindungslinien $\overline{1\,2}$ und $\overline{3\,4}$, $\overline{1\,3}$ und $\overline{2\,4}$, $\overline{1\,4}$ und $\overline{2\,3}$. Wenn nun eine Fläche ein Ellipsoid ist, so hat der unendlichferne Kegelschnitt überhaupt keinen reellen Punkt. Da sich ferner die gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte aus einer Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten berechnen lassen, müssen die Koordinatenverhältnisse dieser Punkte paarweise konjugiert imaginär sein. Wir wollen voraussetzen, daß die Punkte 1 und 2 resp. 3 und 4 konjugiert imaginär sind. Wir können dann den Schnittpunkt der Verbindungslinien $\overline{1\,3}$ und $\overline{2\,4}$ auf zweierlei Weise bestimmen. Einmal dadurch, daß wir wie gewöhnlich die Gleichungen der beiden Verbindungslinien aufstellen. Zweitens müssen wir aber auch denselben Punkt erhalten, wenn wir in dieser Rechnung $-i$ statt i setzen. Denn dadurch vertauschen sich nur die Punkte 1 mit 2 und 3 mit 4. Wir haben also dieselben Verbindungslinien wie vorher nur in umgekehrter Reihenfolge. Sie müssen sich also auch in demselben Punkt schneiden. Wäre dieser Schnittpunkt nun aber imaginär, so würde in seinen Koordinatenverhältnissen bei seiner Berechnung in der zweiten Weise

$-i$ statt i stehen. Es würden sich also die Koordinatenverhältnisse im Widerspruch zu dem Vorhergehenden geändert haben. Der betreffende Schnittpunkt muß infolgedessen reell sein. Ebenso läßt sich beweisen, daß die beiden andern Punkte gleicher Polaren reell sind.

Wie aus den kanonischen Formen zu ersehen ist, kann nur in den Fällen der ersten Horizontalreihe der Tabelle in § 7 eine der Flächen ein Ellipsoid sein, denn bei den übrigen Fällen ist es leicht, aus den Flächen reelle Hyperbeln herauszuschneiden. So geschieht dies bei den Fällen der zweiten Horizontalreihe beispielsweise durch die Ebene $z = 0$, bei den Fällen der dritten Horizontalreihe durch die Ebene $y = 0$.

2.

Die Berührungspunkte der Flächen.

Es läßt sich beweisen, daß zwei konzentrische Flächen sich nur in Punkten berühren können, die auf einem Durchmesser liegen, der in bezug auf beiden Flächen dieselbe konjugierte Ebene hat und daß sie sich immer dann berühren, wenn dieser Durchmesser für beide Flächen gleich groß ist. Denn in einem Berührungspunkt haben die Flächen dieselbe Tangentialebene; die konjugierte Ebene eines Durchmessers nach dem Berührungspunkt dieser Tangentialebene ist aber diejenige Ebene, die durch den Mittelpunkt geht und der Tangentialebene parallel ist. Sie ist also für beide Flächen dieselbe Ebene. Ebenso folgt auch der zweite Teil des Satzes, denn die Tangentialebenen an beide Flächen in den Endpunkten eines Durchmessers, der für beide Flächen dieselbe Länge und dieselbe konjugierte Ebene hat, müssen dieser konjugierten Ebene parallel sein und fallen folglich zusammen.

Hat der Durchmesser eine endliche Länge, so müssen sich die Flächen hiernach in seinen beiden Endpunkten berühren. Ist er dagegen eine Asymptote, so haben die Flächen eine unendlichferne Berührung. Hieraus folgt,

daß den Berührungspunkten der unendlichfernen Kegelschnitte Berührungen der Flächen im Unendlichfernen entsprechen.

3.

Die Schnittkurve der konzentrischen Flächen.

Die Schnittkurve hat einen Mittelpunkt, denn wenn ein Punkt x_0, y_0, z_0 den beiden Flächen genügt, so genügt ihnen auch der Punkt $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$. Der Mittelpunkt der Kurve ist derselbe, wie der der konzentrischen Flächen. Zerfällt die Schnittkurve in Kurven niederer Ordnung, so brauchen diese für sich nicht zentrisch zu sein und, wenn sie es sind, nicht denselben Mittelpunkt wie die Flächen zu haben. Es muß aber ihre Lage in bezug auf diesen Mittelpunkt so sein, daß ihre Gesamtheit eine zentrische Kurve bildet.

Haben wir eine nicht zerfallende Raumkurve, so kann man sich eine Vorstellung von ihrer Gestalt verschaffen, wenn man die Tangenten in den unendlichfernen Punkten bestimmt. Ist der unendlichferne Punkt kein Berührungspunkt der Flächen, so ergibt sich die Tangente in ihm als Schnittlinie der Tangentenebenen an beide Flächen in diesem Punkt. Da die Tangentenebenen unendlichferner Punkte durch den Mittelpunkt gehen, so tut es auch ihre Schnittlinie. Die Tangente in einem solchen Punkt geht also durch den Mittelpunkt. Wir wollen eine solche Tangente, der sich ein Ast der Kurve unbegrenzt nähern muß, eine Asymptote nennen. Wenn der unendlichferne Punkt ein Berührungspunkt der Flächen ist, so ist die Schnittlinie der Tangentenebenen unbestimmt. Der unendlichferne Berührungspunkt ist dann immer die Spitze eines der singulären Cylinder. Da dieser Cylinder die Kurve ganz enthält, müssen die Tangenten in der unendlichfernen Spitze Erzeugende des Cylinders sein. Sie ergeben sich also als Schnittlinie dieses Cylinders und der Tangentenebene der beiden Flächen in dem unendlichfernen Punkt.

Die Schnittkurve zerfällt immer, wenn die Flächen sich im Endlichen berühren.*)

Nach 2 kann eine solche Berührung nämlich nur erfolgen, wenn die Flächen einen Durchmesser haben, der für beide dieselbe konjugierte Ebene und dieselbe Länge hat. Setzen wir nun voraus, daß die Flächen auf ein Koordinatensystem bezogen sind, dessen z-Achse ein solcher Durchmesser und dessen andere Achsen auf der konjugierten Ebene dieses Durchmessers liegen. Es ist dies bei einem Berührungspunkt im Endlichen immer möglich, da dann der Durchmesser mit seiner konjugierten Ebene nicht zusammenfallen kann. Die Koeffizienten in diesem Koordinatensystem seien a'_{ik} und b'_{ik}. Es besteht zwischen den Koordinaten des Berührungspunktes $x = 0$, $y = 0$, $z = \mp a$ und den Koordinaten der Tangentenebene im Berührungspunkt $u = 0$, $v = 0$, $w = \pm \frac{1}{a}$ folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}'\,0 + a_{12}'\,0 \pm a_{13}'\,a \\ 0 &= a_{21}'\,0 + a_{22}'\,0 \pm a_{23}'\,a \\ \mp \frac{1}{a} &= a_{31}'\,0 + a_{32}'\,0 \pm a_{33}'\,a. \end{aligned}$$

Dasselbe System können wir in bezug auf die Flächen $\varphi = 0$ bilden.

Es ist also:

$$a_{13}' = a_{23}' = b_{13}' = b_{23}' = 0 \qquad a_{33}' = -\frac{1}{a^2} \qquad b_{33}' = -\frac{1}{a^2}.$$

Die Gleichungen unserer Flächen lauten also:

$$f = -\frac{z^2}{a^2} + a_{11}'\,x^2 + a_{22}'\,y^2 + 2\,a_{12}'\,xy + 1 = 0.$$

$$\varphi = -\frac{z^2}{a^2} + b_{11}'\,x^2 + b_{22}'\,y^2 + 2\,b_{12}'\,xy + 1 = 0.$$

*) Für den Fall 3 hat Monge dies schon entdeckt; vgl. darüber Correspondance sur l'école royale polytechnique II., Seite 319.

Wenn wir die Gleichungen voneinander subtrahieren, so erhalten wir die singuläre Fläche $f - \varphi = 0$. Diese Fläche ist ein Ebenenpaar. Da unsere Schnittkurve auf dieser singulären Fläche ganz enthalten sein muß, so muß sie in zwei ebene Kurven zerfallen.

§ 9.

Der Normalfall.

Bei der Untersuchung der einzelnen Fälle erkennt man sofort aus der Tabelle des § 7, daß der Fall 1 eine andere Stellung einnimmt, wie die übrigen Fälle. Er ist gewissermaßen der Normalfall, von dem die anderen die Ausnahmefälle sind. Wegen seiner Stellung wollen wir ihm eine genauere Behandlung angedeihen lassen, als den übrigen Fällen.*)

1.

Die Transformationsformeln.

Zunächst soll die Transformation auf seine kanonische Form,

$$f = \lambda_1' a_{11}' x'^2 + \lambda_2' a_{22}' y'^2 + \lambda_3' a_{33}' z'^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = a_{11}' x'^2 + a_{22}' y'^2 + a_{33}' z'^2 + 1 = 0$$

die in § 7 nur angedeutet war, wirklich durchgeführt werden. Zu diesem Zweck setzen wir in § 7 die Werte, die sich für die Größen m_1, m_2, m_3 aus den Gleichungen 6 ergeben, in die Gleichungen 5 ein. Die neuen Variabeln der Formeln 5 wollen wir statt y_1, y_2, y_3 jetzt $x' y' z'$ nennen. Die Formeln 5 nehmen dann folgende Gestalt an

*) Wir finden schon in der Correspondance sur l'école royale polytechnique III., Seite 319 einen Aufsatz von Chasles, in dem das Transformationsproblem gelöst und er ausführlich beschrieben ist.

$$1)\quad x = \frac{\beta_1' x'}{\sqrt{(\beta_1')^2 + (\beta_2')^2 + (\beta_3')^2}} + \frac{\beta_1'' y'}{\sqrt{(\beta_1'')^2 + (\beta_2'')^2 + (\beta_3'')^2}} + \frac{\beta_1''' z'}{\sqrt{(\beta_1''')^2 + (\beta_2''')^2 + (\beta_3''')^2}}$$

und zwei entsprechende Ausdrücke für y und z.

Die Größen $\beta_k^{(i)}$ sind nach § 7 die Koeffizienten der Formeln 4, durch die zwei Kegelschnitte

$$f' = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0$$
$$\varphi' = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{23}yz + 2b_{13}xz = 0$$

auf ihr gemeinsames Koordinatendreieck transformiert werden. Sie sind also die Koordinaten der Ecken dieses Polardreiecks. Man kann sie nach § 3 als Punkte gleicher Polaren aus folgendem System von Gleichungen berechnen.

$$\begin{aligned}
(a_{11} + \lambda_j b_{11})\,\beta_1^{(j)} + (a_{12} + \lambda_j b_{12})\,\beta_2^{(j)} + (a_{13} + \lambda_j b_{13})\,\beta_3^{(j)} &= 0\\
(a_{21} + \lambda_j b_{21})\,\beta_1^{(j)} + (a_{22} + \lambda_j b_{22})\,\beta_2^{(j)} + (a_{23} + \lambda_j b_{23})\,\beta_3^{(j)} &= 0\\
(a_{31} + \lambda_j b_{31})\,\beta_1^{(j)} + (a_{32} + \lambda_j b_{32})\,\beta_2^{(j)} + (a_{33} + \lambda_j b_{33})\,\beta_3^{(j)} &= 0\\
j = 1,\ 2,\ 3.&
\end{aligned}$$

Die Determinante unserer Gleichungen ist nach unserer früheren Bezeichnung $\Delta_{44}(\lambda_j)$. Ihre Unterdeterminanten zweiten Grades wollen wir mit $\Delta_{ik}'(\lambda_j)$ bezeichnen. Die $\beta_k^{(j)}$ ergeben sich dann wie folgt

$$\beta_1^{(j)} : \beta_2^{(j)} : \beta_3^{(j)} \quad \begin{cases} \Delta_{11}'(\lambda_j) : \Delta_{12}'(\lambda_j) : \Delta_{13}'(\lambda_j) = \beta_1^{(j)2} : \beta_1^{(j)}\beta_2^{(j)} : \beta_1^{(j)}\beta_3^{(j)} \\ \Delta_{21}'(\lambda_j) : \Delta_{22}'(\lambda_j) : \Delta_{23}'(\lambda_j) = \beta_2^{(j)}\beta_1^{(j)} : \beta_2^{(j)2} : \beta_2^{(j)}\beta_3^{(j)} \\ \Delta_{31}'(\lambda_j) : \Delta_{32}'(\lambda_j) : \Delta_{33}'(\lambda_j) = \beta_3^{(j)}\beta_1^{(j)} : \beta_3^{(j)}\beta_2^{(j)} : \beta_3^{(j)2} \end{cases}$$

Es ist also

$$2)\quad \begin{aligned}
\varrho^2\,\beta_1^{(j)2} &= \Delta_{11}'(\lambda_j) & \varrho^2\,\beta_1^{(j)}\beta_2^{(j)} &= \Delta_{12}'(\lambda_j)\\
\varrho^2\,\beta_2^{(j)2} &= \Delta_{22}'(\lambda_j) & \varrho^2\,\beta_1^{(j)}\beta_3^{(j)} &= \Delta_{13}'(\lambda_j)\\
\varrho^2\,\beta_3^{(j)2} &= \Delta_{33}'(\lambda_j) & \varrho^2\,\beta_2^{(j)}\beta_3^{(j)} &= \Delta_{23}'(\lambda_j)
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Richtungskosinus der neuen x'Achse gegen die alten Achsen mit cos α_1, cos β_1, cos γ_1, ebenso die der neuen y'Achse und z'Achse mit cos α_2, cos β_2, cos γ_2 resp. cos α_3, cos β_3, cos γ_3, so ist nach 1

$$3) \qquad \cos\alpha_j = \frac{\beta_1^{(j)}}{\sqrt{(\beta_1^{(j)})^2 + (\beta_2^{(j)})^2 + (\beta_3^{(j)})^2}}$$

$$\cos\beta_j = \frac{\beta_2^{(j)}}{\sqrt{(\beta_1^{(j)})^2 + (\beta_2^{(j)})^2 + (\beta_3^{(j)})^2}} \qquad j = 1, 2, 3.$$

$$\cos\gamma_j = \frac{\beta_3^{(j)}}{\sqrt{(\beta_1^{(j)})^2 + (\beta_2^{(j)})^2 + (\beta_3^{(j)})^2}}$$

Setzen wir die Ausdrücke, die sich aus den Gleichungen 2 ergeben in diese Werte ein, so erhalten wir die Richtungskosinus der neuen Achsen gegen die alten. Damit sind die Transformationsformeln aufgestellt.

Wir wollen jetzt, um die Koeffizienten der Gleichungen 1 zu berechnen, die Transformation wirklich ausführen. Es ergibt sich für a_{11}', a_{22}', a_{33}' zunächst folgender Wert

$$a_{jj}' = b_{11}\cos\alpha_j^2 + b_{22}\cos\beta_j^2 + b_{33}\cos\gamma_j^2 + 2\,b_{12}\cos\alpha_j\cos\beta_j + 2\,b_{23}\cos\beta_j\cos\gamma_j + 2\,b_{13}\cos\alpha_j\cos\gamma_j \qquad j = 1, 2, 3.$$

oder, wenn man die Werte, die sich aus den Gleichungen 3 und 2 ergeben, hierin einsetzt:

$$a_{jj}' = \frac{b_{11}\Delta_{11}'(\lambda_j) + b_{22}\Delta_{22}'(\lambda_j) + b_{33}\Delta_{33}'(\lambda_j) + 2b_{12}\Delta_{12}'(\lambda_j) + 2b_{23}\Delta_{23}'(\lambda_j) + 2b_{13}\Delta_{13}'(\lambda_j)}{\Delta_{11}'(\lambda_j) + \Delta_{22}'(\lambda_j) + \Delta_{33}'(\lambda_j)} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Der Zähler dieser Ausdrücke ist $\frac{\partial \Delta_{44}(\lambda_j)}{\partial \lambda_j}$. Es ergibt sich also

$$a_{jj}' = \frac{\frac{\partial \Delta_{44}(\lambda_j)}{\partial \lambda_j}}{\Delta_{11}'(\lambda_j) + \Delta_{22}'(\lambda_j) + \Delta_{33}'(\lambda_j)} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Da $\Delta_{44}(\lambda) = B_{44}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ ist, wenn wir die Determinante $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ mit B_{44} bezeichnen, so erhalten wir

$$a_{11}' = \frac{B_{44}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{\Delta_{11}'(\lambda_1) + \Delta_{22}'(\lambda_1) + \Delta_{33}(\lambda_1)}$$

$$a_{22}' = \frac{B_{44}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\Delta_{11}'(\lambda_2) + \Delta_{22}'(\lambda_2) + \Delta_{33}'(\lambda_2)}$$

$$a_{33}' = \frac{B_{44}(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{\Delta_{11}'(\lambda_3) + \Delta_{22}'(\lambda_3) + \Delta_{33}'(\lambda_3)}$$

Damit ist unsere Transformation beendet. Unsere Formeln verlangen aber aus folgendem Grunde noch eine Diskussion. Im allgemeinen Fall ist nämlich nur bewiesen, daß es stets ein bestimmtes gemeinsames Polartetraëder gibt, auf das wir unsere Flächen transformieren können. In den Transformationsformeln treten die Koordinaten der Ecken dieses Tetraëders als Koeffizienten auf. Bekanntlich sind die Koordinaten dieser Ecken nur bis auf konstante Faktoren bestimmt, die als willkürliche Größen in die Transformationsformeln mit eingehen. Bei unserem Problem sind diese Faktoren aber durch die Gleichung § 7, 6 bestimmt worden. Da wir diese Größen als Sinus der Neigungswinkel der neuen Koordinaten gegen die Koordinatenebene auffassen können, so bedeutet dies geometrisch, daß im allgemeinen Fall diese Neigungswinkel unbestimmt gelassen sind, während wir, wie es bei kartesischen Koordinaten üblich ist, festgesetzt haben, daß die neuen Koordinaten parallel den drei Koordinatenachsen sein sollen. Es erhebt sich nun die Frage, ob die von uns zu diesem Zweck vorgenommene Berechnung der Größen m_i aus den Gleichungen § 7, 6 immer möglich ist. Die Bedingung hierfür ist offenbar, daß

$$(\beta_1^{(j)})^2 + (\beta_2^{(j)})^2 + (\beta_3^{(j)})^2 \neq 0 \qquad j = 1, 2, 3$$

oder nach 2, daß

$$\Delta_{11}'(\lambda_j) + \Delta_{22}'(\lambda_j) + \Delta_{33}'(\lambda_j) \neq 0$$

Wenn die λ_j alle reell sind, so ist diese Bedingung immer erfüllt, denn zunächst ist es klar, daß nicht alle $\Delta_{ii}'(\lambda_j) = 0$ sein können, da dieses zufolge $\frac{\partial \Delta(\lambda)^{\lambda=\lambda_j}}{\partial \lambda} = 0$ eine Doppelwurzel voraussetzen würde. Ferner folgt aus der aus 2 hervorgehenden Proportion

$$\Delta_{11}'(\lambda_j) : \Delta_{22}'(\lambda_j) : \Delta_{33}'(\lambda_j) = \Delta_{i1}'(\lambda_j)^2 : \Delta_{i2}'(\lambda_j)^2 : \Delta_{i3}'(\lambda_j)^2,$$

daß die $\Delta_{ii}'(\lambda_j)$ alle dasselbe Zeichen haben. Es ist also $\Delta_{11}(\lambda_j) + \Delta_{22}(\lambda_j) + \Delta_{33}(\lambda_j)$ niemals gleich Null und die Ausdrücke für die Richtungskosinus sind immer bestimmt und endlich. In diesem Fall sind unsere Formeln also immer brauchbar. Sind dagegen die λ_j teilweise imaginär, so kann der Ausdruck

$$\Delta_{11}'(\lambda_j) + \Delta_{22}'(\lambda_j) + \Delta_{33}'(\lambda_j) = 0$$

und damit können unsere Transformationsformeln unbrauchbar werden. Daß dies in der Tat möglich ist, zeigt folgendes Beispiel aus der Geometrie der Ebene

$$f = x^2 + 2xy - y^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = x^2 \quad y^2 + 1 = 0$$

Die Determinante des Büschels hat drei verschiedene Wurzeln.

Die Gleichungen der gemeinsamen konjugierten Durchmesser lauten $x - iy = 0$ und $x + iy = 0$.

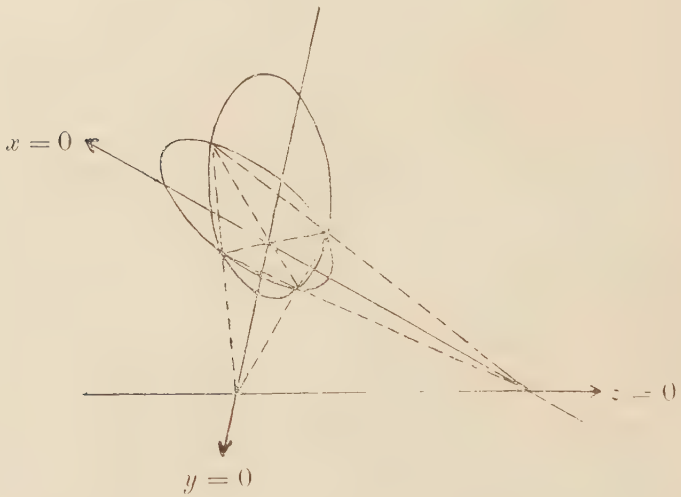
Trotzdem ist die Transformation auf diese Durchmesser nicht auszuführen, weil die Richtungskosinus dieser Durchmesser unendlich groß sind. Wir müssen uns in diesem Fall damit begnügen, das Transformationsproblem in ähnlicher Weise wie im allgemeinen Fall zu lösen.

2.

Die Beschreibung des Normalfalles.

Wir gehen jetzt an die Untersuchung des Falles 1. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene schneiden sich in vier getrennten Punkten. Ihre Lagebeziehungen sind also die der Figur 1.*)

Fig. 1.



Die Punkte 1, 0, 0 resp. 0, 1, 0 resp. 0, 0, 1 sind die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks und infolgedessen die unendlichfernen Punkte der neuen Koordinatenachsen.

Die kanonische Form lautet, wenn wir die jetzt überflüssigen Indices fortlassen:

$$f = \lambda_1' a_{11} x^2 + \lambda_2' a_{22} y^2 + \lambda_3' a_{33} z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 1 = 0.$$

Die Gleichungen der singulären Flächen lauten:

*) Diese und die folgenden Figuren finden sich bei Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I.

$$f - \varphi = a_{11}(\lambda_1' - 1)x^2 + a_{22}(\lambda_2' - 1)y^2 + a_{33}(\lambda_3' - 1)z^2 = 0$$
$$f - \lambda_1'\varphi = a_{22}(\lambda_2' - \lambda_1')y^2 + a_{33}(\lambda_3' - \lambda_1')z^2 + 1 - \lambda_1' = 0$$
$$f - \lambda_2'\varphi = a_{11}(\lambda_1' - \lambda_2')x^2 + a_{33}(\lambda_3' - \lambda_2')z^2 + 1 - \lambda_2' = 0$$
$$f - \lambda_3'\varphi = a_{11}(\lambda_1' - \lambda_3')x^2 + a_{22}(\lambda_2' - \lambda_3')y^2 + 1 - \lambda_3' = 0$$

Wir haben also *einen Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze und drei Cylinder, deren Achsen die Koordinatenachsen sind.* Die Schnittkurve der beiden Oberflächen war im allgemeinen im Fall 1 eine Raumkurve vierter Ordnung. Wir werden also bei konzentrischen Flächen *eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung* erhalten. Die Tangenten in den vier unendlichfernen Punkten der Kurve sind, da diese Punkte keine Berührungspunkte sind, nach § 8, 3 die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Mittelpunkte. Die Richtungskosinus dieser Tangenten verhalten sich wie die Koordinaten der vier Schnittpunkte der unendlichfernen Kegelschnitte. Bezeichnen wir diese Koordinaten mit x_1, y_1, z_1 u. s. w., so ist

$$\begin{aligned} \varrho\, x_i &= \pm\sqrt{a_{22}\, a_{33}\,(\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \varrho\, y_i &= \pm\sqrt{a_{33}\, a_{11}\,(\lambda_3 - \lambda_1)} \qquad i = 1, 2, 3, 4. \\ \varrho\, z_i &= \pm\sqrt{a_{11}\, a_{22}\,(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned}$$

Da es nur auf das Verhältnis der Koordinaten ankommt, so sind das in der Tat vier Punkte.*)

Dies sind also auch die Verhältnisse der Richtungskosinus, der vier Tangenten der Raumkurve in den vier unendlichfernen Punkten oder die der Asymptoten der Raumkurve.

Aus den Lagebeziehungen der unendlichfernen Kegelschnitte erkennt man noch, daß die Asymptotenebenen der drei Cylinder durch die Asymptoten der Raumkurve gehen, und daß die Asymptotenebenen der Cylinder zu den Koordinatenebenen harmonisch liegen.

---

*) Vgl. Clebsch-Lindemann, Bd. I., Seite 125.

§ 10.

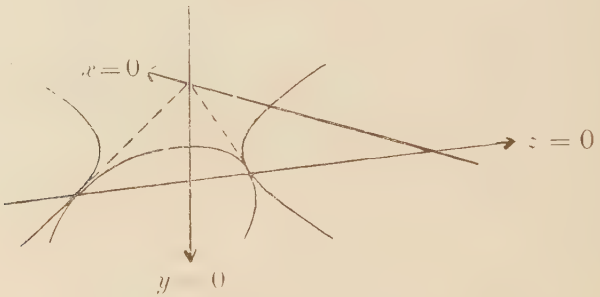
Beschreibung der übrigen Fälle.

Fall 2.

Es ist eine Doppelwurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in zwei Punkten.

Die Lage der unendlichfernen Kegelschnitte ist die der Figur 2.

Fig. 2.



Die Ecken des Polardreiecks sind wie im vorigen Fall bezeichnet. Es ist zu bemerken, daß ∞^1 gemeinsame Polardreiecke vorhanden sind. Ihre Ecken werden gebildet durch den Punkt 0, 0, 1 und durch irgend zwei zu den Berührungspunkten harmonisch liegende Punkte. Für jedes Koordinatensystem, bei dem die unendlichfernen Punkte der Achsen die Ecken eines dieser Polardreiecke sind, lauten die kanonischen Formen

$$f = \lambda_1' (a_{11} x^2 + a_{22} y^2) + \lambda_3' a_{33} z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 1 = 0.$$

Nach § 8, 2 müssen sich die Flächen immer im Unendlichfernen berühren, wenn dies bei den unendlichfernen Kegelschnitten der Fall ist. *Die Flächen berühren sich also in zwei unendlichfernen Punkten.* Die singulären Flächen sind folgende

$$f \quad \varphi = (\lambda_1' \quad 1)(a_{11}x^2 + a_{22}y^2) + (\lambda_3' - 1)a_{33}z^2 = 0$$
$$f \quad \lambda_1'\varphi \quad a_{33}(\lambda_3' \quad \lambda_1')z^2 + 1 \quad \lambda_1' = 0$$
$$f \quad \lambda_3'\varphi = (\lambda_1' - \lambda_3')(a_{11}x^2 + a_{22}y^2) + 1 - \lambda_3' \quad 0.$$

Wir haben *einen Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze, ein doppelt zählendes Parallelebenenpaar und einen einfach zählenden Cylinder.* Die beiden Ebenen des Parallelebenenpaares haben denselben Abstand von dem Mittelpunkt der Flächen. Die Schnittkurve besteht aus *zwei parallelen kongruenten Mittelpunktskegelschnitten. Die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte wird von dem Mittelpunkt der Flächen halbiert.* Aus der Lage der unendlichfernen Kegelschnitte folgt, daß zwei Koordinatenebenen und die Asymptotenebenen des einfach zählenden Cylinders vier harmonische Ebenen bilden. Ist $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist $f = 0$ eine Rotationsfläche und $\varphi = 0$ eine Kugel. Der unendlichferne Kegelschnitt einer Kugel ist bekanntlich der unendlichferne imaginäre Kugelkreis. Wir erhalten aus diesem Spezialfall von 2 also den Satz, daß eine Rotationsfläche den unendlichfernen imaginären Kugelkreis in 2 Punkten berührt.

Fall 3.

Es ist eine Doppelwurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene schneiden sich in vier getrennten Punkten.

Die Lage der Kegelschnitte und des Koordinatendreiecks ist also wie in Figur 1. Die kanonischen Formen sind

$$f = \lambda_1' a_{11}x^2 + \lambda_2' a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi - \quad a_{11}x^2 + \quad a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 1 = 0.$$

Es hat also der zur xy-Ebene konjugierte Durchmesser in bezug auf beide Flächen dieselbe Richtung und dieselbe Länge. Aus § 8, 2 geht also hervor, daß *die Flächen*

sich in den Endpunkten eines Durchmessers berühren. Die singulären Flächen lauten

$$f - \lambda_1' \varphi = a_{22} (\lambda_2' - \lambda_1') y^2 + a_{33} (1 - \lambda_1') z^2 + 1 - \lambda_1' = 0$$
$$f - \lambda_2' \varphi = a_{11} (\lambda_1' - \lambda_2') x^2 + a_{33} (1 - \lambda_2') z^2 + 1 - \lambda_2' = 0$$
$$f - \varphi \quad = a_{11} (\lambda_1' - 1) \; x^2 + a_{22} (\lambda_2' - 1) y^2 = 0.$$

Wir haben *zwei einfach zählende Cylinder und ein doppelt zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt.* Unsere Schnittkurve besteht also aus zwei Kegelschnitten, die auf den beiden Ebenen des doppelt zählenden Ebenenpaares liegen. Der Mittelpunkt ist für jeden Kegelschnitt der gemeinsame Mittelpunkt der Flächen. Da die Kegelschnitte außerdem auf den beiden singulären Cylindern liegen, müssen sie sich in zwei Punkten schneiden. Die Schnittkurve besteht also aus *zwei sich in zwei Punkten schneidenden Kegelschnitten, deren gemeinsamer Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Flächen zusammenfällt.* Ist die Fläche $\varphi = 0$ eine Kugel und lassen wir den Radius dieser Kugel von 0 bis ∞ wachsen, so berührt diese Kugel dreimal die Fläche $f = 0$ in zwei Punkten der Hauptachsen. Zugleich zerfällt dann die Raumkurve vierter Ordnung in zwei Kreise. Doch ist bekanntlich nur ein System dieser Kreise reell. Wir erhalten so als Spezialfall dieses Falles die Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung.

Fall 4.

Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in zwei Punkten.

Ihre Lage ist also die der Figur 2. Die kanonischen Formen lauten

$$f - \lambda_1' (a_{11} x^2 + a_{22} y^2) + a_{33} z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi - a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 1 = 0.$$

Es hat also der zur xy-Ebene konjugierte Durchmesser für beide Flächen dieselbe Größe und Richtung. Außerdem berühren sich die unendlichfernen Kegelschnitte in zwei Punkten. *Die Flächen haben also zwei endliche und zwei unendlichferne Berührungspunkte.* Die singulären Flächen sind

$$\begin{aligned} f \quad & \varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0 \\ f \quad & \lambda_1' \varphi = a_{33}z^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir haben *ein doppelt zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt und ein doppelt zählendes Parallelebenenpaar.* Die Schnittkurve besteht also aus *zwei parallelen Linienpaaren. Die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte wird vom Mittelpunkt der Flächen halbiert.*

Fall 5.

Es ist eine dreifache Wurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene fallen zusammen.

Die kanonische Form lautet

$$\begin{aligned} f &= \lambda_1' (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) + 1 = 0 \\ \varphi &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Flächen sind also ähnlich und ähnlich gelegen. *Sie berühren sich längs eines unendlichfernen Kegelschnittes.* Die singulären Flächen lauten

$$\begin{aligned} f \quad & \varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0 \\ & f - \lambda_1' \varphi = t^2 = 0.^*) \end{aligned}$$

Wir haben *einen Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze und eine dreifach zählende unendlichferne Doppelebene.* Die Schnittkurve ist also *ein doppeltzählender unendlichferner Kegelschnitt.*

*) Man denke sich die Gleichungen homogen geschrieben.

Fall 6.

Es ist eine dreifache Wurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in zwei Punkten.

Die Lage der unendlichfernen Kegelschnitte ist also wie Fig. 2. Die kanonischen Formen lauten

$$f = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + \lambda_3'\,a_{33}\,z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 1 = 0.$$

Wie in Fall 2 können wir statt der Durchmesser, die die x und y-Achse unseres Koordinatensystems bilden, irgend zwei andere wählen, deren unendlichferne Punkte harmonisch zu den Berührungspunkten der unendlichfernen Kegelschnitte liegen, ohne daß sich die kanonischen Formen unserer Flächen ändern. Da in allen Fällen die zur xz- und yz-Ebene konjugierten Durchmesser für beide Flächen dieselbe Richtung und Länge haben, so *berühren sich die Flächen längs eines Kegelschnittes*. Die singulären Flächen lauten

$$f - \varphi = z^2 = 0$$
$$f - \lambda_3'\,\varphi = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + 1 - \lambda_3' = 0.$$

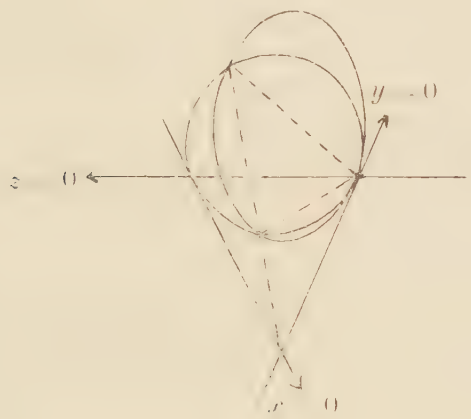
Wir haben *eine dreifach zählende Doppelebene durch den Mittelpunkt und einen einfach zählenden Cylinder*. Die Schnittkurve ist also *ein doppelt zählender Kegelschnitt mit demselben Mittelpunkt wie die konzentrischen Flächen*.

Fall 7.

Es ist eine Doppelwurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in einem und schneiden sich in zwei weiteren Punkten.

Die Lage der unendlichfernen Kegelschnitte ist also die der Figur 3.

Fig. 3.



Die kanonischen Formen lauten

$$f = 2\lambda_1' a_{12} x y + a_{22} y^2 + \lambda_2' a_{33} z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = 2 a_{12} x y + a_{33} z^2 + 1 = 0.$$

Da die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene sich berühren, *haben die Flächen eine unendlichferne Berührung.* Die singulären Flächen lauten

$$f - \varphi = 2 a_{12} (\lambda_1 - 1) x y + a_{22} y^2 + a_{33} (\lambda_2' - 1) z^2 = 0$$
$$f - \lambda_1' \varphi = a_{22} y^2 + a_{33} (\lambda_2' - \lambda_1') z^2 + 1 - \lambda_1' = 0$$
$$f - \lambda_2' \varphi = 2 a_{12} (\lambda_1' - \lambda_2') x y + a_{22} y^2 + 1 - \lambda_2' = 0.$$

Wir haben *einen einfach zählenden Kegel, einen doppelt zählenden und einen einfach zählenden Cylinder.* Berechnen wir jetzt nach § 8. 3 die Tangenten der Schnittkurve in den unendlichfernen Punkten. Die Tangenten in den Punkten, die keine Berührungspunkte sind, sind wieder die Verbindungslinien mit dem Mittelpunkt. Die Tangenten im Berührungspunkt ergeben sich als gemeinsame Linien der Tangentialebene in diesem Punkt $y = 0$

und des doppelt zählenden Cylinders $f - \lambda_1' \varphi = 0$, dessen unendlichferne Spitze der Berührungspunkt ist. Die Gleichungen der Tangenten sind also $y = 0$, $z = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1' - 1}{a_{33}(\lambda_2' - \lambda_1')}}$. Der Berührungspunkt ist daher ein Doppelpunkt der Kurve. *Die Schnittkurve ist also eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit zwei durch den Mittelpunkt und zwei parallelen vom Mittelpunkt gleich weit entfernten und auf einer durch ihn gehenden Ebene liegenden Asymptoten oder eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit einem unendlichfernen Doppelpunkt.* Aus der Lage der unendlichfernen Kegelschnitte erkennt man noch, daß die Achse des doppelt zählenden Cylinders auf einer Asymptotenebene des einfachen liegt, und daß diese Ebene und die z-Ebene, sowie die beiden Asymptotenebenen des doppelt zählenden Cylinders vier harmonische Ebenen bilden.

Fall 8.

Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in einem und schneiden sich in zwei weiteren Punkten.

Die Lage der Kegelschnitte ist daher wie in Figur 3.

Die kanonischen Formen lauten

$$f = 2\lambda_1' a_{12} x y + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = 2 a_{12} x y + a_{33} z^2 + 1 = 0.$$

Der zur xy-Ebene konjugierte Durchmesser hat in bezug auf beide Flächen dieselbe Richtung und Länge. Da die unendlichfernen Kegelschnitte sich außerdem in einem Punkt berühren, folgt also, daß *die Flächen zwei endliche und einen unendlichfernen Berührungspunkt haben.*

Die singulären Flächen lauten

$$f - \varphi = 2 a_{12} (\lambda_1' - 1) x y + a_{22} y^2 = 0$$
$$f - \lambda_1' \varphi = a_{22} y^2 + a_{33} (1 - \lambda_1') z^2 + 1 - \lambda_1' = 0.$$

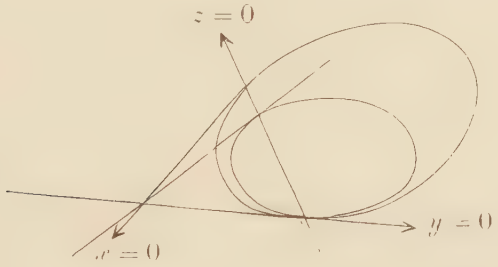
Wir haben *ein doppelt zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt und einen doppelt zählenden Cylinder.* Die Schnittkurve bilden *ein Kegelschnitt, der denselben Mittelpunkt wie die konzentrischen Flächen hat, und zwei ihn in Punkten eines Durchmessers treffende parallele Linien.*

Fall 9.

Es ist eine dreifache Wurzel $\lambda \neq -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in einem Punkt dreipunktig.

Die Lage der Kegelschnitte ist also die der Figur 4.

Fig. 4.



Es ist zu bemerken, daß alle Punkte der Geraden $y = 0$ Punkte gleicher Polaren sind und daß man jedes System als Koordinatensystem einführen kann, dessen unendlichferne Punkte ein Punkt der Geraden $y = 0$ und die Schnittpunkte der Polaren dieses Punktes mit einem der unendlichfernen Kegelschnitte sind. Alle diese Koordinatensysteme führen auf dieselbe kanonische Form:

$$f = \lambda_1' (2\, a_{12}\, x\, y + a_{33}\, z^2) + a_{22}\, y^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = 2\, a_{12}\, x\, y + a_{33}\, z^2 + 1 = 0.$$

Entsprechend den unendlichfernen Kegelschnitten berühren sich die Flächen in einem unendlichfernen Punkt.

Die singulären Flächen lauten

$$f - \varphi = (\lambda_1' - 1)(2\, a_{12}\, x\, y + a_{33}\, z^2) + a_{22}\, y^2 = 0$$
$$f - \lambda_1' \varphi = a_{22}\, y^2 + 1 - \lambda_1' = 0.$$

Wir haben *einen einfach zählenden Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze und ein dreifach zählendes Parallelebenenpaar.* Es schneidet das Parallelebenenpaar aus dem Kegel aber keine Mittelpunktskegelschnitte heraus, sondern zwei Parabeln. *Die Schnittkurve besteht also aus zwei kongruenten Parabeln mit parallelen Achsen, deren Öffnungen entgegengesetzt liegen. Die Verbindungslinie der Scheitelpunkte wird durch den Mittelpunkt der Flächen halbiert.*

Fall 10.

Es ist eine dreifache Wurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in einem und schneiden sich in zwei weiteren Punkten.

Ihre Lage ist wie in Figur 3.

Die kanonischen Formen lauten

$$f = 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + \lambda_2'\,a_{33}\,z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = 2\,a_{12}\,x\,y + a_{33}\,z^2 + 1 = 0.$$

Wie bei 7 und 8 haben *die Flächen einen unendlichfernen Berührungspunkt.*

Die singulären Flächen lauten

$$f - \varphi = a_{22}\,y^2 + a_{33}\,(\lambda_2' - 1)\,z^2 = 0$$
$$f - \lambda_2'\,\varphi = 2\,a_{12}\,(1 - \lambda_2')\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 1 - \lambda_2' = 0.$$

Wir haben *ein dreifach zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt und einen einfach zählenden Cylinder.* Die Achse des Ebenenpaares ist eine Asymptote des Cylinders. Die Schnittkurve besteht also aus *zwei Kegelschnitten, die beide denselben Mittelpunkt wie die konzentrischen Flächen und eine gemeinsame Asymptote haben.*

Fall 11.

Es ist eine vierfache Wurzel vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in einem Punkt dreipunktig.

Die Lage der Kegelschnitte ist also die der Figur 4. Die kanonische Form ist

$$f = 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = 2\,a_{12}\,x\,y + a_{33}\,z^2 + 1 = 0.$$

Wie bei Fall 9 bleiben auch hier die kanonischen Formen dieselben für jedes Koordinatensystem, dessen unendlichferne Punkte ein Punkt der Graden $y = o$ und die beiden Schnittpunkte der Polaren dieses Punktes mit einem der unendlichfernen Kegelschnitte sind. Da in allen diesen Systemen der zur xy-Ebene konjugierte Durchmesser für beide Flächen dieselbe Länge und Richtung hat, so *berühren sich die Flächen in zwei parallelen Erzeugenden.*

Die singuläre Fläche ist

$$f - \varphi = y^2 = 0.$$

Wir haben *eine vierfach zählende Doppelebene durch den Mittelpunkt.*

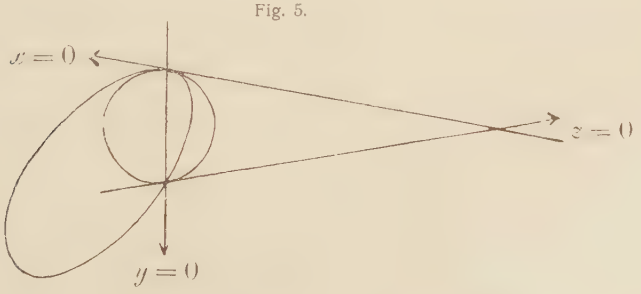
Die Schnittkurve besteht also aus zwei parallelen Linien, die denselben Abstand vom Mittelpunkt haben und auf einer durch ihn gehenden Ebene liegen.

Fall 12.

Es ist eine dreifache Wurzel $\lambda = -1$ vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in einem Punkte zweipunktig und schneiden sich in einem weiteren.

Ihre Lage ist die der Figur 5.

Fig. 5.



Die kanonischen Formen lauten

$$f = 2\,a_{12}\,x\,y + \lambda_1'\,(2\,a_{13}\,x\,z + a_{22}\,y^2) + 1 = 0$$
$$\varphi = 2\,a_{13}\,x\,z + a_{22}\,y^2 + 1 = 0.$$

Die Flächen haben einen unendlichfernen Berührungspunkt.

Die singulären Flächen lauten

$$f - \varphi = 2\,a_{12}\,x\,y + (\lambda_1' - 1)\,(2\,a_{13}\,x\,z + a_{22}\,y^2) = 0$$
$$f - \lambda_1'\,\varphi = 2\,a_{12}\,x\,y + 1 - \lambda_1' = 0.$$

Wir haben *einen einfach zählenden Kegel mit dem Mittelpunkt als Spitze und einen dreifach zählenden Cylinder.* Wenn wir die Tangenten der Schnittkurve in den unendlichfernen Punkten berechnen, so ist die Tangente in dem Punkt, der kein Berührungspunkt ist, wieder die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkt der konzentrischen Flächen. Die Tangenten in dem Berührungspunkt ergeben sich nach § 8, 3 als gemeinsame Linien der Tangentenebene $x = 0$ in diesem Punkt und des Cylinders $f - \lambda_1'\,\varphi = 0$, dessen unendlichferne Spitze der Berührungspunkt ist. Bei der Berechnung müssen wir die Gleichung dieses Cylinders in homogener Form annehmen. Die Gleichungen der Tangenten ergeben sich hieraus, wie folgt:

$$x = 0 \qquad t^2 = 0$$

Wir haben also in dem Berührungspunkt eine unendlichferne Doppeltangente. Der unendlichferne Punkt ist daher ein Rückkehrpunkt. *Die Schnittkurve ist also eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit einer durch den Mittelpunkt gehenden Asymptote und einer unendlichfernen Doppeltangente oder eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit einem unendlichfernen Rückkehrpunkt.*

Fall 13.

Es ist eine vierfache Wurzel vorhanden. Die Kegelschnitte auf der unendlichfernen Ebene berühren sich in

einem Punkte zweipunktig und schneiden sich in einem weiteren.

Ihre Lage ist wie in Figur 5.

Die kanonische Form lautet

$$f = 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{13}\,x\,z + a_{22}\,y^2 + 1 = 0$$
$$\varphi = 2\,a_{13}\,x\,z + a_{22}\,y^2 + 1 = 0.$$

Die Flächen haben einen unendlichfernen Berührungspunkt.

Die singuläre Fläche ist

$$f - \varphi = x\,y = 0.$$

Wir haben *ein vierfach zählendes Ebenenpaar mit der Achse durch den Mittelpunkt.* Bringen wir dieses Ebenenpaar zum Schnitt mit einer der Flächen, so erhalten wir als Schnittkurve

$$x = 0; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-1}{a_{22}}}, \quad \text{und } y = 0; \quad 2\,a_{13}\,x\,z + 1 = 0.$$

Die Schnittkurve besteht also aus einem Kegelschnitt, der denselben Mittelpunkt wie die konzentrischen Flächen hat, und aus zwei geraden Linien, die einer Asymptote des Kegeschnitts parallel sind und auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene liegen, in welcher beide denselben Abstand vom Mittelpunkt haben.

§ 11.

Vergleichung der Resultate mit denen der allgemeinen Theorie.

Die Resultate der beiden letzten Paragraphen ergaben sich aus den im § 7 für die einzelnen Fälle aufgestellten Normalformen. Diese Normalformen sind aus der Theorie der Lagebeziehungen zweier auf einer Ebene liegenden Kegelschnitte abgeleitet. Wir haben also die Eigenschaften der einzelnen Fälle bei zwei konzentrischen Flächen zweiter Ordnung entwickelt, ohne die Lagebeziehungen

zweier Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen als bekannt vorauszusetzen. Wir wollen nun zum Schluß noch zeigen, wie sich unsere Fälle auch aus den Lagebeziehungen im allgemeinen, die sich bei Clebsch-Lindemann, Geometrie des Raumes, Band I, S. 215—232 finden, ergeben. Wir gehen zu diesem Zweck von den Schnittkurven, durch die unter anderm auch die einzelnen Fälle charakterisiert sind, aus und wollen zunächst feststellen, welche spezielle Gestalt diese Schnittkurven in den einzelnen Fällen annehmen müßten, wenn diese Fälle bei konzentrischen Flächen möglich wären. Wie wir schon in § 8, 3 bemerkt hatten, muß die Schnittkurve zweier konzentrischer Flächen ebenfalls zentrisch sein. In folgendem wollen wir links die allgemeinen Schnittkurven nach Clebsch-Lindemann angeben und rechts daneben die Gestalt, die eine solche Kurve, wenn sie zentrisch wäre, annehmen müßte.

1. Eine Raumkurve vierter Ordnung.	Eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung.
2. Eine Raumkurve vierter Ordnung mit einem eigentlichen Doppelpunkt.	Eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit einem unendlichfernen Doppelpunkt; das ist eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten, die vom Mittelpunkt denselben Abstand haben und auf einer durch ihn gehenden Ebene liegen.

Denn zunächst muß der Doppelpunkt als einzig vorhandener singulärer Punkt entweder mit dem Mittelpunkt zusammenfallen oder unendlichfern liegen. Es ist nur das Letztere möglich, da wir die Flächen als eigentliche

Flächen zweiter Ordnung vorausgesetzt haben. Aus demselben Grunde muß die Tangentenebene im Doppelpunkt durch den Mittelpunkt gehen. In dieser Ebene müssen nun die beiden Tangenten ein zentrisches Gebilde ausmachen, das denselben Mittelpunkt wie die konzentrischen Flächen hat. Es ist das nur möglich, wenn sie beide parallel sind und denselben Abstand vom Mittelpunkt haben: denn, wenn sie durch den Mittelpunkt gingen, so würden sie, weil sie auch noch durch den unendlichfernen Punkt gehen sollen, zusammenfallen, und der Punkt wäre kein eigentlicher Doppelpunkt.

3. Eine Raumkurve vierter Ordnung mit einem Rückkehrpunkt.

Eine zentrische Raumkurve vierter Ordnung mit einem unendlichfernen Rückkehrpunkt; das ist eine Raumkurve mit einer unendlichfernen Doppeltangente.

Der Punkt liegt aus demselben Grunde wie bei 2 unendlichfern. Die Doppeltangente kann nun entweder durch den Mittelpunkt gehen, oder ebenfalls unendlichfern liegen. Es bleibt nur das Letztere übrig, denn wenn sie durch den Mittelpunkt ginge, müßte sich ihr als Asymptote die Kurve unbegrenzt nähern und zwar, da die Kurve zentrisch ist, ihrer Verlängerung nach der einen Seite ebenso wie ihrer Verlängerung nach der anderen. Wenn man sich nun diese Asymptote als unendlichgroßen Kreis vorstellt, so sieht man, daß sich in diesem Falle im Unendlichen die Kurvenäste ineinander fortsetzen, ohne daß die Kurve in sich zurückkehrt. Wir hätten also keinen Rückkehrpunkt.

4. Die Schnittkurve zerfällt in eine gerade Linie und in eine Raumkurve dritter Ordnung.

Die Fälle 4 und 5 scheiden aus, weil eine einzig vorhandene gerade Linie als Teil einer zentrischen Kurve

5. Die Schnittkurve besteht aus einer geraden Linie und einer sie berührenden Raumkurve dritter Ordnung.

entweder durch den Mittelpunkt gehen müßte oder unendlichfern liegen. Beides ist unmöglich, da der Mittelpunkt kein Punkt und eine unendlichferne Gerade keine Erzeugende unsrer als eigentlich vorausgesetzten Flächen sein kann.

6. Die Schnittkurve besteht aus zwei Kegelschnitten, die sich in zwei Punkten schneiden.

Es sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

1. Die Schnittkurve besteht aus zwei Kegelschnitten, die beide denselben Mittelpunkt, wie die konzentrischen Flächen haben und sich in zwei Punkten schneiden.

2. Die Schnittkurve besteht aus zwei parallelen kongruenten Mittelpunktskegelschnitten. Die Verbindungslinie ihrerMittelpunkte wird durch den Mittelpunkt der Flächen halbiert.

Denn die beiden Ebenen der Kegelschnitte müssen entweder durch den Mittelpunkt gehen, oder parallel sein und denselben Abstand vom Mittelpunkt haben. Im ersten Fall muß jeder Kegelschnitt für sich eine zentrische Kurve sein, die denselben Mittelpunkt wie die Flächen hat. Im zweiten Fall müssen die Kegelschnitte sich in zwei unendlichfernen Punkten berühren und zusammen ein zentrisches Gebilde ausmachen. Sie müssen also parallele kongruente Mittelpunktskegelschnitte sein, deren Mittel-

punkte denselben Abstand vom Mittelpunkt der Flächen haben.

7. Die Schnittkurve besteht aus zwei Kegelschnitten, die sich in einem Punkt berühren.	Es sind zwei Möglichkeiten vorhanden: 1. Die Schnittkurve besteht aus zwei Kegelschnitten, die beide denselben Mittelpunkt wie die konzentrischen Flächen und eine gemeinsame Asymptote haben. 2. Die Schnittkurve besteht aus zwei kongruenten Parabeln mit parallelen Achsen, deren Öffnungen entgegengesetzt liegen. Die Verbindungslinie der Scheitelpunkte wird durch den Mittelpunkt der Flächen halbiert.

Die beiden Ebenen der Kegelschnitte müssen dieselbe Lage haben wie bei 6. Da ihre Schnittlinie die gemeinsame Tangente der Kegelschnitte ist und der Berührungspunkt als einzig vorhandener Punkt unendlichfern liegen muß, so haben wir, wenn die Ebenen durch den Mittelpunkt gehen, die erste Möglichkeit. Sind sie parellel, so haben die Kegelschnitte eine unendlichferne Tangente. Sie sind also Parabeln, die als zentrische Kurve die unter 2 beschriebene Lage haben.

8. Die Schnittkurve besteht aus einem Kegelschnitt mit zwei geraden Linien als Treffgeraden.	Die Schnittkurve besteht aus einem Kegelschnitt und zwei parallelen Linien, die ihn in den Endpunkten eines

Durchmessers treffen. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist mit dem Mittelpunkt der Flächen identisch.

9. Die Schnittkurve besteht aus zwei Linienpaaren, die ein windschiefes Viereck bilden.

Die Schnittkurve besteht aus zwei parallelen Linienpaaren, deren Schnittpunkte denselben Abstand vom Mittelpunkt haben und auf einer durch ihn gehenden geraden Linie liegen.

Denn wir können dieselben Betrachtungen wie bei 6 anstellen. Die bei 6 vorhandenen Möglichkeiten fallen aber offenbar in eine zusammen.

10. Die Schnittkurve besteht aus einem Kegelschnitt und zwei ihn in einem Punkt treffenden geraden Linien.

Die Schnittkurve besteht aus einem Kegelschnitt, der denselben Mittelpunkt, wie die konzentrischen Flächen hat, und zwei Linien, die einer Asymptote parallel sind, denselben Abstand vom Mittelpunkt haben und auf einer durch ihn gehenden Ebene liegen.

Denn der Punkt muß als einzig vorhandener singulärer Punkt wieder unendlichfern liegen.

11. Die Schnittkurve besteht aus einer Doppellinie und zwei diese Linie treffenden Geraden.

Dieser Fall scheidet aus, da die Doppellinie entweder durch den Mittelpunkt gehen oder unendlichfern liegen müßte. Beides ist aus demselben Grunde wie bei 4 und 5 unmöglich.

12. Die Schnittkurve besteht aus einem doppelt zählenden Kegelschnitt.

Es sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

1. Die Schnittkurve besteht aus einem doppelt zählenden Kegelschnitt, der denselben Mittelpunkt, wie die Flächen hat.

2. Die Schnittkurve besteht aus einem doppelt zählenden unendlichfernen Kegelschnitt.

13. Die Schnittkurve besteht aus zwei Doppellinien.

Die Schnittkurve besteht aus zwei parallelen Doppellinien, die denselben Abstand vom Mittelpunkt haben und auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene liegen.

Dies müßten also die Schnittkurven zweier konzentrischer Oberflächen in den einzelnen Fällen sein. Wir wollen nun nachweisen, daß diese Kurven tatsächlich existieren und, daß zu ihnen auch jedesmal zwei konzentrische Oberflächen gehören, durch deren Schnitt sie erzeugt werden. Zu diesem Zweck setzen wir, was die drei ersten Fälle anbetrifft, in die kanonischen Formen der beiden Oberflächen im allgemeinen für x_1, x_2, x_3, x_4 resp. t, x, y, z, wo x, y, z, t die Bedeutung von kartesischen Koordinaten haben sollen. Diese kanonischen Formen lauten im Fall 1:

$$f = \lambda_1 a_{11} x_1^2 + \lambda_2 a_{22} x_2^2 + \lambda_3 a_{33} x_3^2 + \lambda_4 a_{44} x_4^2$$
$$\varphi = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2,$$

im Fall 2:

$$f = \lambda_1 a_{11} x_1^2 + \lambda_2 a_{22} x_2^2 + 2\lambda_3 a_{34} x_3 x_4 + a_{33} x_3^2$$
$$\varphi = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{34} x_3 x_4,$$

im Fall 3:

$$f = \lambda_1 a_{11} x_1^2 + \lambda_2 (a_{33} x_3^2 + 2 a_{24} x_2 x_4) + 2 a_{23} x_2 x_3$$
$$\varphi = a_{11} x_1^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{24} x_2 x_4.$$

Wir haben es auch, nach dieser Substitution, mit Lagebeziehungen resp. des ersten, zweiten und dritten Falles zu tun, da diese nur von den Konstanten abhängen. Die Oberflächen sind nun aber konzentrisch. Es sind also die drei ersten Fälle bei konzentrischen Flächen möglich. Infolgedessen sind die bei ihnen in der vorigen Tabelle rechts angeführten Kurven ihre Schnittkurven. Da wir für jeden Fall nur eine charakteristische Schnittkurve haben, so tritt auch keine weitere Teilung dieser drei Fälle ein. Was die anderen Fälle angeht, so ist ohne weiteres klar, daß die bei ihnen rechts angeführten Kurven existieren. Diese Kurven sind aber Spezialfälle der Schnittkurven zweier Oberflächen zweiter Ordnung. Sie sind also, wie diese, Raumkurven vierter Ordnung von der ersten Spezies. Solche Kurven kann man immer durch den Schnitt zweier Oberflächen zweiter Ordnung erzeugen. Es gibt also in allen Fällen zu den rechts angeführten Kurven entsprechende Lagebeziehungen von konzentrischen Oberflächen. Wir sehen daher, daß bei dieser zweiten Ableitung dieselben Fälle wieder ausscheiden, wie bei der ersten, und daß wir andererseits gezwungen sind, einzelne Fälle genau so, wie in § 4 noch einmal zu teilen. Damit erhält unser Klassifikationsprinzip eine neue Bestätigung.

Zum Schlusse ist es mir eine liebe Pflicht, Herrn Professor Dr. Staude für die vielfache Unterstützung und Anregung bei der Anfertigung meiner Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.